2021 年第八届鹏程杯数学邀请赛（决赛）试题卷

小学五年级组

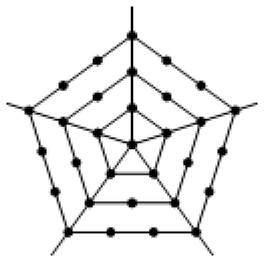
考试时间：10:00-11:40　　　满分：150 分

考试说明

（1）本试卷包括 12 道填空题、5 道解答题。
（2）填空题答案不完整则不得分，解答题按评分标准酌情给分。
（3）需在答题卡上作答，写在试题卷上不得分。

一、填空题（每小题 7 分，共 84 分）

1. 张明在计算乘法时，真粗心！把乘数末两位上的 38 看成了 83，使计算结果多了 1170. 这道题的被乘数是__________.



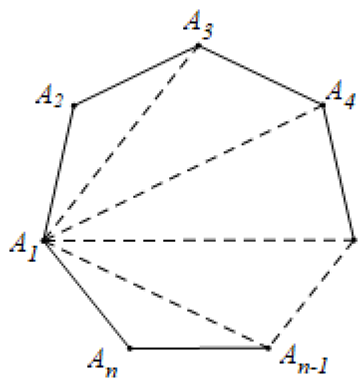
2. 如图是一个五边形点阵，中心一个点算第一层，第二层每边两个点（正五边形顶点处有一点为相邻两边公用），第三层为每边三个点，第四层为每边四个点，⋯，依次类推. 若该五边形点阵共有 100 层，则点阵中，点的总数共有__________个.

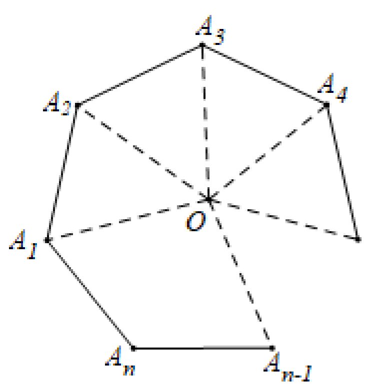
3. 已知$\overline{\text{鹏城杯赛真棒}} \times 4 = \overline{\text{真棒鹏城杯赛}}$，则六位数$\overline{\text{鹏城杯赛真棒}} =$__________.

4. 把 125 本作业本分给五（1）班同学，已知同学们中最多有人分到 4 本，那么这个班至少有__________人.

5. 先阅读下列材料：

如左图，n边形$A_1A_2\cdots A_n$，从A_1出发可以连$n-3$条对角线，它们把n边形分割成$n-2$个三角形，所以n边形的n个内角之和为$(n-2)\cdot 180°$.

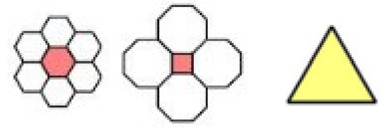




如右图，连结OA_1，OA_2，⋯，OA_n. 把n边形分割成n个三角形. 这n个三角形内角之和为$n\cdot 180°$. 再去掉以 O 为顶点的n个角之和. 即为n边形的内角和. 即：

$$n\cdot 180° - 360° = (n-2)\cdot 180°$$

再回答如下问题：



如右图所示，一个正六边形恰好被 6 个正六边形围住，一个正方形恰好被 4 个正八边形围住。那么，一个正三角形恰好被 3 个正__________边形围住.

6. 有一个七位数 20***21，中间有三个数字看不清，只知道这个七位数能被 2021 整除. 这个七位数最大是__________.

7. 9 个外观上一样的小球，其中一个重量与另外 8 个不一样，只用一台天平，如果要确保找出那个不一样的小球，至少需要称__________次.

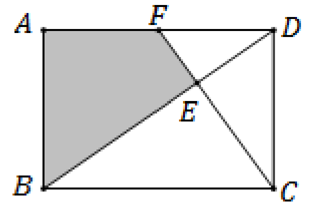
8. 用六位数表示时刻，如 5 点 6 分 7 秒表示为“050607”. 在这样的六位数中，如果前三位数与后三位完全相同，我们就称这样的时刻是“幸运时刻”，如“142142”，即 14 点 21 分 42 秒就是一个“幸运时刻”. 那么在一昼夜之间共有__________个“幸运时刻”.

9. 两个棱长为 1 厘米的正方体可以粘成一个表面积为 10 平方厘米的长方体. 现在有 10 个棱长为 1 厘米的正方体，将它们粘成一个多面体，其表面积最少是__________平方厘米.

10. 有甲、乙两人，甲在汽车窗边看见乙向相反的方向走去，40 秒后甲下车去追赶乙. 如果他步行的速度比乙快一倍，但比汽车速度慢$\frac{4}{5}$. 则甲追上乙需要__________秒.

11. 已知在平面上画 5 个圆最多可把平面分成 22 个部分，如果再画一条直线，最多可把平面分成__________部分.

12. 如图，已知在矩形 ABCD 中，$S_{\triangle EFD}=8$，$S_{\triangle ECD}=12$，则阴影部分 ABEF 的面积为__________.



二、解答题

13. 计算：$85.5\times 2345 - 85.4\times 1345$

14. 先阅读下列材料：

有位农夫一边走一边抱怨：“实在太辛苦了！我为什么过得那么辛苦呢？我又穷又苦，活着有什么意思？口袋里只有这么点钱，一下子就会花光了！可是有些人不但很富有，财源还滚滚而来，这实在太不公平了！谁能帮助我变得富有呢？”

说完话的一刹那，恶魔出现在他眼前。

“你刚才说什么？如果你需要钱，我可以帮你，因为这实在太简单了！你看见那座桥没有？”

“看到了。”农夫点点头，心里非常恐惧。

“你只要走过那座桥，你口袋中的钱就会增加一倍，再走回来又增加一倍。每走一次桥，你的钱就会变成两倍。”

“真的吗？”农夫不敢置信地问。

“当然是真的！”恶魔很肯定的回答，“我告诉你的绝不会错！不过，我要你的钱每增加一倍时就给我 24 戈比，你说怎么样？”

“先生，没问题！”农夫爽快地回答，“我每过一次桥钱就多了一倍，所以每次给你 24 戈比根本不算什么，我现在可以开始了吗？”

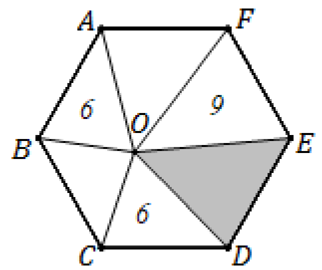
果真，农夫走过那座桥，钱就增加了一倍，他遵守诺言付给恶魔 24 戈比，再回头走第二次，钱又多了一倍，他当然又付 24 戈比给恶魔，接着再走第三次，口袋里的钱又变成了两倍，但此时农夫的钱恰好是 24 戈比，为了遵守约定，只好把钱通通给了恶魔，身上连 1 戈比都没有剩下。

请问：（1）求农夫本来有多少钱？

（2）农夫开始至少有多少钱才能保证自己不亏？

（3）如果开始农夫的钱数为整数，那么有没有可能最终变成 2021 戈比？

15. 如图，在正六边形 ABCDEF 中，已知$S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OCD}=6$，$S_{\triangle OEF}=9$. 求阴影部分的面积.



16. 某个非零自然数 N，它既是 2020 个数字和相同的自然数之和，又是 2021 个数字和相同的自然数之和，恰好还是 2022 个数字和相同的自然数之和. 求 N 的最小值.

17. 黑板上写有数$\frac{1}{0^3+1},\frac{1}{1^3+1},\frac{1}{2^3+1},\cdots,\frac{1}{100^3+1}$，每次任意擦去其中的两个数$a$、$b$，然后写上$2ab-a-b+1$，经过 100 次操作之后，最后剩下一个数，求这个数.

2021 年第八届鹏程杯数学邀请赛（决赛）答案

小学五年级组

考试时间：10:00-11:40　　　满分：150 分

考试说明

（1）本试卷包括 12 道填空题、5 道解答题。

（2）填空题答案不完整则不得分，解答题按评分标准酌情给分。

（3）需在答题卡上作答，写在试题卷上不得分。

一、填空题（每小题 7 分，共 84 分）

1. 张明在计算乘法时，真粗心！把乘数末两位上的 38 看成了 83，使计算结果多了 1170. 这道题的被乘数是__________.

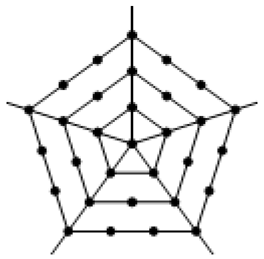
【答案】：26

【解析】：设被乘数是x，乘数是$100x+38$，则

$$x(100x+83)-x(100x+38)=1170$$

从而　　　　　　$x=26$

2. 如图是一个五边形点阵，中心一个点算第一层，第二层每边两个点（正五边形顶点处有一点为相邻两边公用），第三层为每边三个点，第四层为每边四个点，…，依次类推. 若该五边形点阵共有 100 层，则点阵中点的总数共有__________个.



【答案】：24751

【解析】：如图，凤城五个三角形 99 层点阵，中间还剩一个点. 总计点数为：$5\times(1+2+3+\cdots 99)+1=5\times(1+99)\times 99\div 2+1=24751$.

3. 已知$\overline{\text{鹏城杯赛真棒}}\times 4=\overline{\text{真棒鹏城杯赛}}$，则六位数$\overline{\text{鹏城杯赛真棒}}=$__________.

【答案】：142857，190476，238095

【解析】：设$\overline{\text{鹏城杯赛}}=x$，$\overline{\text{真棒}}=y$，则

$$4(100x+y)=10000y+x$$

$$400x+4y=10000y+x$$

$$399x=9996y$$

即　　　　$$19x=476y$$

又因为　　$(19, 476)=1$

所以　　$19/y$，而y是个两位数

$y=19, 38, 57, 76, 95.$

相应的　　$x=476, 952, 1428, 1904, 2380.$

再考虑到x是四位数.

所以，所求六位数是 142857，190476，238095.

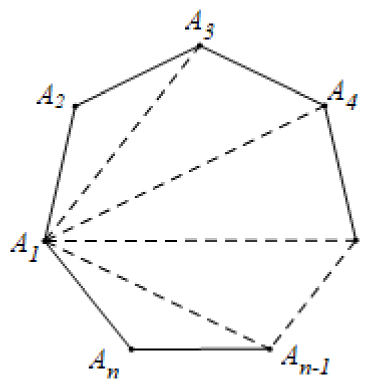
4. 把 125 本作业本分给五（1）班同学，已知有人分到 4 本，那么这个班至少有__________人.

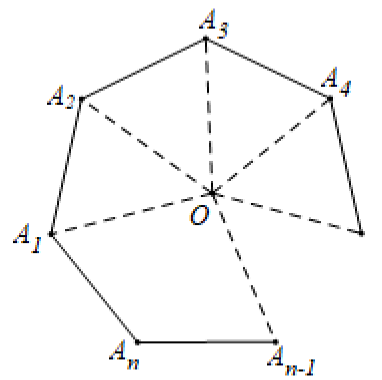
【答案】：32

【解析】：要使参加分书的学生尽量的少，那么得 4 本书的人要尽量的多. 因为$125\div 4=31\cdots\cdots 1$. 所以五（1）班至少有$31+1=32$人.

5. 先阅读下列材料：

如左图，n边形$A_1A_2\cdots A_n$，从A_1出发可以连$n-3$条对角线，它们把n边形分割成$n-2$个三角形，所以n边形的n个内角之和为$(n-2)\cdot 180°$.



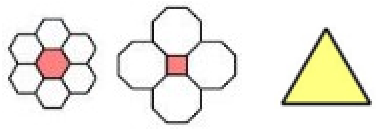


如右图，连结OA_1，OA_2，…，OA_n. 把n边形分割成n个三角形. 这n个三角形内角之和为$n\cdot 180°$. 再去掉以 0 为顶点的n个角之和. 即为n边形的内角和. 即：

$$n\cdot 180°-360°=(n-2)\cdot 180°$$

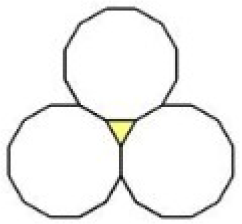
再回答如下问题：

如右图所示，一个正六边形恰好被 6 个正六边形围住，一个正方形恰好被 4 个正八边形围住．那么，一个正三角形恰好被 3 个正____________边形围住．



【答案】：12

【解析】：$(360°-60°)3\div 2=150°$，边数：$360°\div(180°-150°)=12$，能被 3 个正十二边形围住．如下图：



6. 有一个七位数 20***21，中间有三个数字看不清，只知道这个七位数能被 2021 整除．这个七位数最大是____________．

【答案】：2023021

【解析】：$2099921\div 2021=1039\cdots\cdots 102$，$2099921-102=2099819$，$2099819-2021\times 8=2099819-17168=2083651$，$2083651-20210-20210-20210=2023021$．

7. 9 个外观上一样的小球，其中一个重量与另外 8 个不一样，只用一台天平，如果要确保找出那个不一样的小球，至少需要称____________次．

【答案】：3

【解析】：把 9 个分成三堆，每堆 3 个，分别成为 A 堆，B 堆，C 堆，先拿 A、B 两堆进行称重，会出现平衡、A 轻 B 重，B 轻 A 重三种情况．其中 A 轻 B 重，B 轻 A 重两种情况等价，故视为一种情况，后不再赘述．A 轻 B 重，此时把 B 替换成 C，会产生两种可能情况．A 重 C 轻和平衡．若 A 重 C 轻，则重量不同的球在 A 中，并且知道该球重于其他球．A 中三个球拿出来称量．若平衡则，第三个球不一样，若不平衡，则重的小球不一样．若一开始 A、B 平衡，则不一样的球在 C 中，同上述方法一定能两次称出不同的球．

8. 用六位数表示时刻，如 5 点 6 分 7 秒表示为“050607”．在这样的六位数中，如果前三位数与后三位完全相同，我们就称这样的时刻是“幸运时刻”，如“142142”，即 14 点 21 分 42 秒就是一个“幸运时刻”．那么在一昼夜之间共有____________个“幸运时刻”．

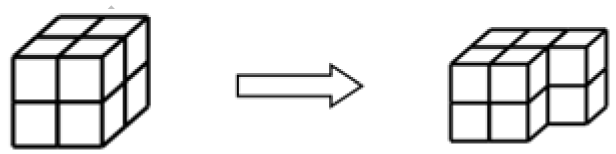
【答案】：96

【解析】：可能出现“幸运时刻”的钟点是：00、01、02、03、04、05、06、10、11、12、13、14、15、20、21、22、23． 共 16 个钟点。其中每个钟点内可出现 6 次“幸运时刻”，比如 3 点至 4 点之间，有 030030，031031，032032，033033，034034，035035；又如 20 点至 21 点之间，有 200200，201201，202202，203203，204204，205205.所以一昼夜共有“幸运时刻” $6\times 16=96$（个）

9. 两个棱长为 1 厘米的正方体可以粘成一个表面积为 10 平方厘米的长方体．现在有 10 个棱长为 1 厘米的正方体，将它们粘成一个多面体，其表面积最少是____________平方厘米．

【答案】：30

【解析】：粘合的面越多，其表面积越少，先用 8 个粘成正方体，表面积为最少，再把剩下的两个粘在一起放在正方体上，即下图所示：



表面积最少是：$2\times 2\times 6+2\times 1\times 2+1\times 1\times 2=24+4+2=30$（平方厘米）

10. 有甲、乙两人，甲在汽车上发现乙向相反的方向走去，40 秒后甲下车去追赶乙．如果他步行的速度比乙快一倍，但比汽车速度慢．则甲追上乙需要____________秒．

【答案】：440

【解析】：设甲追上乙要用x秒，再设乙每秒行a个单位，那么甲每秒行$(1+1)a=2$个单位，汽车每秒行$2a\div(1-0.8)=10a$个单位．可列方程

$$2ax-ax=40a+10a\times 40$$

$$ax=440a$$

因为a是乙每秒行的路程，不能为 0，所以，可将方程两边都除以a．得$x=440$.

11. 已知在平面上画 5 个圆最多可把平面分成 22 个部分，如果再画一条直线，最多可把平面分成____________部分．

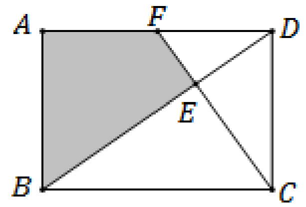
【答案】：32

【解析】：采用递推的方法，从中找出规律和答案．列表如下：

圆的个数	1	2	3	4	...	n
圆分割块数	2	4	8	14	...	n(n-1)+2
再画一条直线分割块数	4	8	11	22	...	n(n-1)+2+2n
增加数	2×1	2×2	2×3	2×4	...	2n

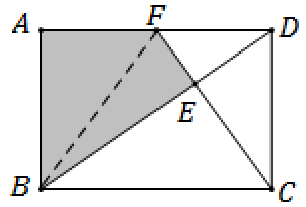
从上表可以看出，最多可把平面分成：$5\times(5-1)+2+2\times5=32$个部分.

12. 如图，已知在矩形 ABCD 中，$S_{\triangle EFD}=8$，$S_{\triangle ECD}=12$，则阴影部分 ABEF 的面积为__________.



【答案】：22

【解析】：连结 BF. 因为 DF//BC，所以$S_{\triangle FBC}=S_{\triangle DBC}$，从而$S_{\triangle BEF}=S_{\triangle ECD}=12$. 又$\frac{S_{\triangle EBC}}{S_{\triangle ECD}}=\frac{BE}{DE}=\frac{S_{\triangle BEF}}{S_{\triangle EFD}}$，即$\frac{S_{\triangle EBC}}{12}=\frac{12}{8}$，所以$S_{\triangle EBC}=18$. 所以$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle BCD}=S_{\triangle EBC}+S_{\triangle ECD}=18+12=30$，所以$S_{阴影ABEF}=S_{\triangle ABD}-S_{\triangle EFD}=30-8=22$.



二、解答题

13. 计算：$85.5\times2345-85.4\times1345$

【解析】：原式

$$
\begin{aligned}
&=(85.4+0.1)\times2345-85.4\times1345\\
&=85.4\times2345+0.1\times2345+85.4\times1345\\
&=85.4\times(2345-1345)+0.1\times2345\\
&=85400+234.5\\
&=85634.5
\end{aligned}
$$

14. 有位农夫一边走一边抱怨：“实在太辛苦了！我为什么过得那么辛苦呢？我又穷又苦，活着有什么意思？口袋里只有这么点钱，一下子就会花光了！可是有些人不但很富有，财源还滚滚而来，这实在太不公平了！谁能帮助我变得富有呢？”

说完话的一刹那，恶魔出现在他眼前。

“你刚才说什么？如果你需要钱，我可以帮你，因为这实在太简单了！你看见那座桥没有？”

“看到了。”农夫点点头，心里非常恐惧。

“你只要走过那座桥，你口袋中的钱就会增加一倍，再走回来又增加一倍。每走一次桥，你的钱就会变成两倍。”

“真的吗？”农夫不敢置信地问。

“当然是真的！”恶魔很肯定的回答，“我告诉你的绝不会错！不过，我要你的钱每增加一倍时就给我 24 戈比，你说怎么样？”

“先生，没问题！”农夫爽快地回答，“我每过一次桥钱就多了一倍，所以每次给你 24 戈比根本不算什么，我现在可以开始了吗？”

果真，农夫走过那座桥，钱就增加了一倍，他遵守诺言付给恶魔 24 戈比，再回头走第二次，钱又多了一倍，他当然又付 24 戈比给恶魔，接着再走第三次，口袋里的钱又变成了两倍，但此时农夫的钱恰好是 24 戈比，为了遵守约定，只好把钱通通给了恶魔，身上连 1 戈比都没有剩下。

请问：（1）求农夫本来有多少钱？

（2）农夫开始至少有多少钱才能保证自己不亏？

（3）如果开始农夫的钱数为整数，那么有没有可能最终变成 2021 戈比？

【解析】：（1）设农夫原有x戈比，则有

$$2\times[2\times(2x-24)-24]-24=0$$
$$2\times(2x-24)-24=12$$
$$2x-24=18$$
$$x=21$$

则农夫原来有 21 戈比.

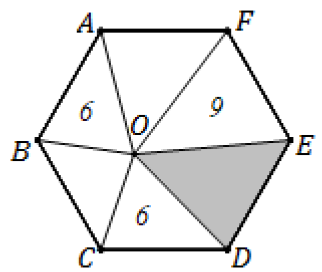
（2）农夫的钱在翻倍减 24 后若等于原来的钱，则不亏. 所以

$$2x-24=x$$
$$x=24$$

故农夫至少有 24 元，则不亏.

（3）$2x-24$为偶数$-$偶数$=$偶数，故每次农夫的钱都会变成偶数，故不可能变为 2021 戈比.

15. 如图，在正六边形 ABCDEF 中，已知$S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OCD}=6$，$S_{\triangle OEF}=9$. 求阴影部分的面积.



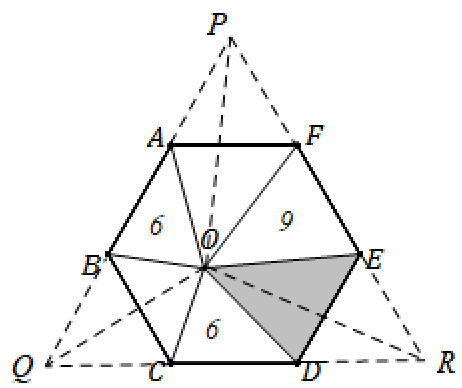
【解析】：把正六边形补成正三角形 PQR. 易知$S_{\triangle PAF}$、$S_{\triangle BQC}$、$S_{\triangle DER}$也是正三角形.

从而 $PA=AB=BQ=QC=CD=DR=RE=EF=FD$

∴ $S_{\triangle DAP}=S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OBQ}$

∴ $S_{\triangle OPQ}=3S_{\triangle OAB}=18$

同理 $S_{\triangle OQR}=18$，$S_{\triangle OPR}=27$



如上图所示分别做 AB、CD、EF 的延长线，由于$ABCDEF$是正六边形，因此很容易得到三角形PMN是正三角形，且三角形PMB的面积是$(6+6+9)\times3=63$（平方厘米），那么六边形$ABCDEF$的面

积是$63 \div 9 \times 6=42$，阴影部分的面积是$42 \div 3-6=8$（平方厘米）或$6+9-42 \div 6=8$（平方厘米）

16. 某个非零自然数 N，它既是 2020 个数字和相同的自然数之和，又是 2021 个数字和相同的自然数之和，恰好还是 2022 个数字和相同的自然数之和. 求 N 的最小值.

【解析】：设 N 是 2020 个数字和为 a 的自然数之和，有是 2021 个数字和为 b 的自然数之和，还是 2022 个数字和为 c 的自然数之和.

由于任何一个数，与它的数字和被 9 除以余数相同，可设

$$N=9k+2020a=9m+2021b=9n+2022c(a、b、c\text{为非零自然数})$$

$\therefore \quad 2020a \equiv 2021b \equiv 2022c(mod9)$

从而 $\quad 4a \equiv 5b \equiv 6c(mod9)$

满足条件的a、b、c最小是$a=6$，$b=3$，$c=1$，所以$N=2020 \times 6=12120$

具体构造如下：

（1）2020 个 6 相加：$\underbrace{6+6+\cdots+6}_{2020\text{个}6}=12120$

（2）设有x个 3 和$(2021-x)$个 12 相加：

$3x+12(2021-x)=12120$，

$x=1348$，即

$$\underbrace{3+3+\cdots+3}_{1348\text{个}3}+\underbrace{12+12+\cdots+12}_{673\text{个}12}=12120$$

（3）设有y个 1 和$(2022-y)$个 10 相加：

$1 \cdot y+10(2022-y)=12120$，

$y=900$，即

$$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{900\text{个}1}+\underbrace{10+10+\cdots+10}_{1122\text{个}10}=12120$$

17. 黑板上写有数$\frac{1}{0^3+1}, \frac{1}{1^3+1}, \frac{1}{2^3+1}, \cdots, \frac{1}{100^3+1}$，每次任意擦去其中的两个数$a$、$b$，然后写上$2ab-a-b+1$，经过 100 次操作之后，最后剩下一个数，求这个数.

【解析】：经观察发现，一旦a、b中有一个数是$\frac{1}{2}$，例如$a=\frac{1}{2}$，则

$$ab-a-b+1=2 \times \frac{1}{2}b-\frac{1}{2}-b+1=\frac{1}{2}$$

即写到黑板上的数是$\frac{1}{2}$.

不管按怎样的顺序操作，总会取到$\frac{1}{1^3+1}=\frac{1}{2}$这个数，之后的操作结果就不再发生变化. 所以剩下的这个数一定是$\frac{1}{2}$.