

2021 年第八届鹏程杯数学邀请赛（决赛）试题卷

六年级组

考试时间：10:40 ~ 12:20 满分：150 分

考试说明

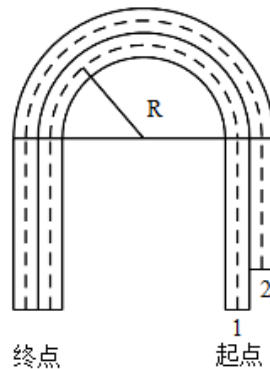
- (1) 本试卷包括 12 道填空题、5 道解答题。
 (2) 填空题答案不完整则不得分，解答题按评分标准酌情给分。
 (3) 需在答题卡上作答，写在试题卷上不得分。

一、填空题（每小题 7 分，共 84 分）

1. 已知 $5 \text{ 鹏城杯赛好} \times 5 = \text{鹏城杯赛好} \times 5 \times 4$ ，则五位数 鹏城杯赛好 = _____。

2. 有一群小朋友分一堆苹果，如果每人分 5 个，就会剩下 4 个苹果；这时走了 3 个小朋友，那么每人分 6 个还会剩 4 个苹果。那么原来苹果的个数是_____。

3. 某校运动会上，200 米赛跑的跑道如右图。其终点部分及起点部分是直道，因中间绕过半圆形跑道，所以外跑道的起点必须前移。如果跑道每道宽 1.22 米，那么相邻两个跑道中，外跑道的起点应前移_____米（ π 取 3.14，结果保留到百分位）。



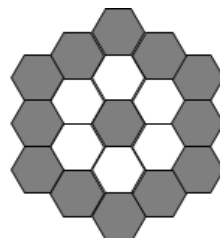
第 3 题图

4. 一辆公共汽车由起点站到终点站共行驶 6 个车站。已知起点站起 4 个车站（包括起点站）上车共有 58 人，终点站前 4 个车站（不包括终点站）下车人数是 47，则从前 4 个车站上车而且在终点站下车的乘客共有_____人。

5. 甲、乙、丙、丁各有一个不同的号码。赵同学说：乙是 2 号，丁是 4 号；钱同学说：乙是 1 号，丙是 4 号；孙同学说：甲是 4 号，丁是 3 号；李同学说：甲是 1 号，丙是 3 号。他们每个人都对了一半，则丙是_____号。

6. 2021 年是中国共产党建党 100 周年，有 100 个分数： $\frac{1}{1921+1}, \frac{2}{1921+2}, \dots, \frac{100}{1921+100}$ ，其中最简分数的个数是_____。

7. 右图是用火柴棒摆成的由若干个正六边形组成的一个图案，图案中没有空隙和重叠，从中心仅有一个正六边形算起，图案现有 3 层。如果再摆 1 层，那么还需要_____根火柴棒。



第 7 题图

8. 连续自然数 1 至 n 的和是一个各位数字相同的三位数，则 $n =$ _____。

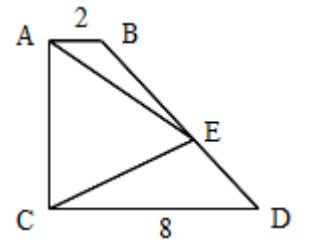
9. 甲每分钟走 70 米，乙每分钟走 80 米，丙每分钟走 60 米。甲、乙两人从 A 地，丙从 B 地同时出发，丙和乙相遇后 2 分钟又遇到甲。A 地与 B 地之间的距离是_____米。

10. 从 1 至 8 这 8 个自然数中，任取 4 个相加，余下 4 个也相加，然后将两个和相乘，能得到_____个不同的乘积。

11. 右图中， $ABCD$ 是直角梯形，上底 $AB = 2$ ，下底 $CD = 8$ ， E 是 BD 上一点，三角形 ABE 的面积是 4.8，

三角形 ACE 的面积是 22.4，则 $AC =$ _____。

12. 圆周上有 12 个点，两两连出六条弦，这些弦彼此没有公共点（既无公共端点，又不相交）。则有_____种连结方法。



第 11 题图

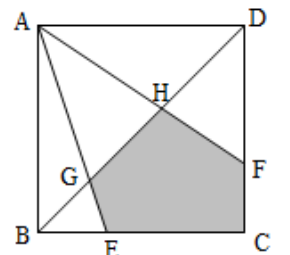
二、解答题（第 13、14 小题各 12 分，第 15~17 小题各 14 分，共 66 分）

13. 定义： $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ ，试计算：

$$\frac{10! - 8!}{9!} - \frac{9! - 7!}{8!} + \frac{8! - 6!}{7!} - \frac{7! - 5!}{6!} + \frac{6! - 4!}{5!} - \frac{5! - 3!}{4!} + \frac{4! - 2!}{3!} - \frac{3! - 1!}{2!}$$

$$\frac{8}{9} + \frac{7}{8} + \frac{6}{7} + \frac{5}{6} + \frac{4}{5}$$

14. n 个瓶中各自装有 $2m$ 克糖水，先将第 1 个瓶中的糖水倒 m 克到第 2 个瓶中，然后将第 2 个瓶中的糖水倒 m 克到第 3 个瓶中， $\dots$ ，再然后将第 $n-1$ 个瓶中的糖水倒 m 克到第 n 个瓶中，最后将第 n 个瓶中的糖水倒 m 克到第 1 个瓶中。这样做过之后，发现 n 个瓶子中的糖水浓度均相同。试以 $n = 3$ 为例，说明最初 n 个瓶子中的糖水浓度原本就是相同的。



第 15 题图

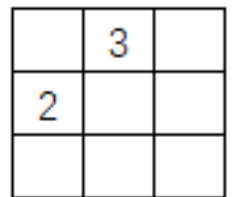
15. 图中，正方形 $ABCD$ 的边长为 6， $CE = 2BE$ ， $DF = 2CF$ ，问五边形 $ECFHG$ 面积是多少？（请勿用相似形的知识作答）

16. 我们将满足以下条件的正整数称为“超常数”：该整数的每个数码都不为零且互不相同，并且将其各位数码打乱，排成一个最大数和一个最小数，二者之差恰为它本身。例如，495 和 6174 都是“超常数”，因为 $954 - 459 = 495$ ， $7641 - 1467 = 6174$ 。请问：是否存在五位的“超常数”？若存在，请举出一个例子；若不存在，请说明理由。

17. 图中是一个 3×3 的正方形网格，其中数字 2 和 3 已经填好，现将数字 1, 4~9 分别填入余下空格中，使得：第二、三两列每个方格中的数都比它左边方格中的数大；第二、三两行每个方格中的数也都比它上方方格中的数大。

(1) 请在图中给出一种填法；

(2) 共有多少种填法？请说明理由。



第 17 题图

2021 年第八届鹏程杯数学邀请赛（决赛） 参考答案

六年级组

考试时间：10:40 ~ 12:20 满分：150 分

考试说明

- (1) 本试卷包括 12 道填空题、5 道解答题。
 (2) 填空题答案不完整则不得分，解答题按评分标准酌情给分。
 (3) 需在答题卡上作答，写在试题卷上不得分。

一、填空题（每小题 7 分，共 84 分）

1. 已知 $\overline{\text{鹏城杯赛好}} \times 5 = \overline{\text{鹏城杯赛好}} \times 4$ ，则五位数 $\overline{\text{鹏城杯赛好}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案：71428。

解：设 $\overline{\text{鹏城杯赛好}} = x$ ，则

$$\begin{aligned} 5(500000 + x) &= 4(10x + 5) \\ 2500000 + 5x &= 40x + 20 \\ 35x &= 2499980 \end{aligned}$$

则

$$x = 71428$$

2. 有一群小朋友分一堆苹果，如果每人分 5 个，就会剩下 4 个苹果；这时走了 3 个小朋友，那么每人分 6 个还会剩 4 个苹果。那么原来苹果的个数是_____。

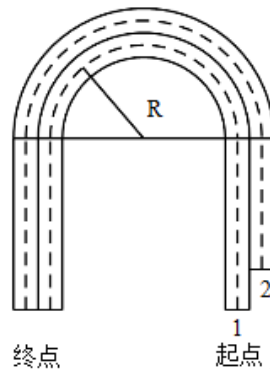
答案：94。

解法一：既然两次分苹果，剩余的苹果都是 4 个，相当于走了的 3 个小朋友的 15 个苹果，给留下的小朋友每人增加 1 个苹果，所以留下的小朋友有 15 名。加上走了的 3 个小朋友，共有 18 个小朋友。原来有 $18 \times 5 + 4 = 94$ 个苹果。

解法二：设小朋友数为 x ，则有 $5x + 4 = 6(x - 3) + 4$ ，得到 $x = 18$ 。所以，原来一共有 $5x + 4 = 94$ 个苹果。

3. 某校运动会上，200 米赛跑的跑道如右图。其终点部分及起点部分是直道，因中间绕过半圆形跑道，所以外跑道的起点必须前移。如果跑道每道宽 1.22 米，那么相邻两个跑道中，外跑道的起点应前移_____米（ π 取 3.14，结果保留到百分位）

答案：3.83



解：设内圈跑道半径为 R 米，那么外圈跑道半径必为 $(R + 1.22)$ 米。内圈跑道半圆周长为 πR 米，外圈跑道半圆周长为 $\pi(R + 1.22)$ 米。两个半圆的长度差为 $\pi(R + 1.22) - \pi R = \pi \times 1.22 \approx 3.83$ （米）。

4. 一辆公共汽车由起点站到终点站共行驶 6 个车站。已知起点站起 4 个车站（包括起点站）上车共有 58 人，终点站前 4 个车站（不包括终点站）下车人数是 47，则从前 4 个车站上车而且在终点站下车的乘客共有_____人。

答案：11。

解：记起点车站为第 1 车站，然后依次记为第 2，3，4，5 车站，终点站为第 6 车站。

上车的总人数应当等于下车总人数。

第 1 至第 4 车站上车人数 + 第 5 车站上车人数（终点站无人上车）

= 第 2 至第 5 车站下车人数 + 终点站下车人数（起始站无人下车）

则有

$$58 + \text{第 5 车站上车人数} = 47 + \text{终点站下车人数}$$

$$11 = 58 - 47 = \text{终点站下车人数} - \text{第 5 车站上车人数}$$

$$= \text{从前 4 个车站上车而在终点站下车的乘客人数}$$

所以，从前 4 个车站上车而在终点站下车的乘客共有 11 人。

说明：可用字母解答。设终点前 5 站上车的人数分别为 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ，始发站后 5 个车站下车的人数分别为 b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 ，则 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6$ ， $58 + a_5 = 47 + b_6$ ，所以 $b_6 - a_5 = 58 - 47 = 11$ 。所以，从前 4 个车站上车而在终点站下车的乘客共有 11 人。

5. 甲、乙、丙、丁各有一个不同的号码。赵同学说：乙是 2 号，丁是 4 号；钱同学说：乙是 1 号，丙是 4 号；孙同学说：甲是 4 号，丁是 3 号；李同学说：甲是 1 号，丙是 3 号。他们每个人都对了一半，则丙是_____号。

答案：4。

解：将已知条件填入下方格网中。因为方格网中仅有 1 个 2 号，所以乙是 2 号，既然每个人都对了一半，且甲、乙、丙、丁各有一个不同的号码，可知：甲是 1 号，丁是 3 号，丙是 4 号。

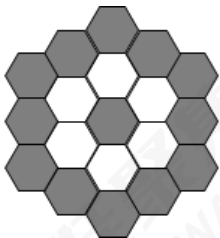
	甲	乙	丙	丁
赵		2		4
钱		1	4	
孙	4			3
李	1		3	

6. 2021 年是中国共产党建党 100 周年，有 100 个分数： $\frac{1}{1921+1}, \frac{2}{1921+2}, \dots, \frac{100}{1921+100}$ ，其中最简分数的个数是_____。

答案：95.

解：对于最大公约数， $(a+b, b) = (a, b)$ ，所以， $(1921+b, b) = (1921, b)$ 。易知， $1921 = 17 \times 113$ （其中 17 和 113 都是质数），1 至 100 中有 5 个含有 17 的约数。所以，可约分数有 5 个，最简分数有 95 个。

7. 右图是用火柴棒摆成的由若干个正六边形组成的一个图案，图案中没有空隙和重叠，从中心仅有一个正六边形算起，图案现有 3 层。如果再摆 1 层，那么还需要_____根火柴棒。



答案：60.

解：寻找规律：第一层有 1 个正六边形，第二层有 6 个正六边形，第三层有 12 个正六边形，其边缘有 $6 \times 3 + 6 \times 2 = 30$ 火柴。第四层将有 18 个正六边形，如果他们彼此不连接的话，共需要 $18 \times 6 = 108$ 根火柴。但是，在新摆出的图案中，它们彼此共用 18 根火柴，和第 3 层的边缘共用 30 根火柴。所以，摆出第 4 层，需要 $108 - 18 - 30 = 60$ 根火柴。

8. 连续自然数 1 至 n 的和是一个各位数字相同的三位数，则 $n =$ _____。

答案：36.

解：

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

设上述三位数的各位数字为 a ， $1 \leq a \leq 9$ ，于是，

$$\frac{1}{2}n(n+1) = \overline{aaa} = 100 \times a + 10 \times a + a = 111a = 3 \times 37a$$

得到

$$\frac{1}{2}n(n+1) = 3 \times 37 \times a$$

$$n(n+1) = 2 \times 3 \times 37 \times a$$

即由此可知， n 或 $n+1$ 能被 37 整除。

若 $n = 37k$ ，则 $k(37k+1) = 6a$ ， $6a \leq 6 \times 9 = 54$ ，即 $k(37k+1) \leq 54$ ，所以， $k = 1$ ，此时， $n = 37$ ，则

$$\frac{n(n+1)}{2} = 703 \text{ 不合题意（它没有 } \overline{aaa} \text{ 的形式）}$$

若 $n+1 = 37k$ ，则 $k(37k-1) = 6a \leq 54$ ，由此得 $k = 1$ ，此时，

$$n+1 = 37, n = 36$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{36 \times 37}{2} = 666$$

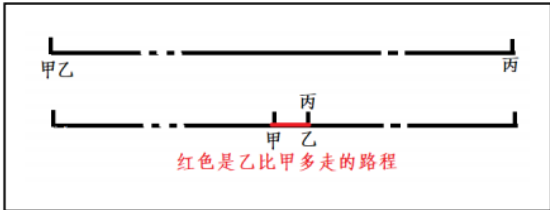
所以

$$n = 36$$

9. 甲每分钟走 70 米，乙每分钟走 80 米，丙每分钟走 60 米。甲、乙两人从 A 地，丙从 B 地同时出发，丙和乙相遇后 2 分钟又遇到甲。A 地与 B 地之间的距离是_____米。

答案：3640.

解：丙和乙相遇，到丙和甲相遇，丙和甲共走的路程： $2 \times (60 + 70) = 260$ （米），此 260 米是乙比甲多走的路程。所以，丙和乙相遇时，甲、乙、丙行走的时间是 $260 \div (80 - 70) = 26$ （分），因此，A 地与 B 地之间的距离是 $(80 + 60) \times 26 = 3640$ （米）。



10. 从 1 至 8 这 8 个自然数中，任取 4 个相加，余下 4 个也相加，然后将两个和相乘，能得到_____个不同的乘积。

答案：9.

解：1 至 8 这 8 个自然数的和是 36，从中任选 4 个数，和的最小值是： $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ ，最大值是： $5 + 6 + 7 + 8 = 26$ ，共有 17 个不同的和：10, 11, 12, 13, ..., 25, 26。若任取的 4 个数的和记为 $(10+n)$ ，则其余 4 个数的和是： $36 - (10+n) = (26-n)$ ， $n = 0, 1, 2, \dots, 16$ 。依照题目要求，求 $(10+n) \times (26-n)$ 有多少个不同的积？

当 $n+m = 16$ 时，

$$(10+n) \times (26-n) = (26-m) \times (10+m)$$

因此，当 $0 \leq n \leq 8$ 时， $(10+n) \times (26-n)$ 的积不同，共有 9 个不同的积。

11. 右图中，ABCD 是直角梯形，上底 $AB = 2$ ，下底 $CD = 8$ ，E 是 BD 上一点，三角形 ABE 的面积是 4.8，三角形 ACE 的面积是 22.4，则 $AC =$ _____。

答案：8.

解：如图，过 E 点作 AC 的垂线，和 AC 交于 F 点。

由于

$$S_{\triangle ABE} = 4.8$$

所以

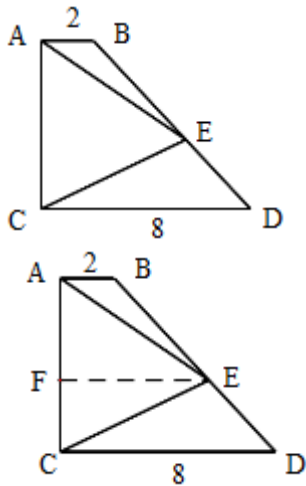
$$\frac{1}{2}AB \cdot AF = 4.8$$

又

$$AB = 2$$

所以

$$AF = 4.8$$



而

$$S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2}CD \cdot CF, \quad CD = 8$$

所以

$$S_{\triangle CDE} = 4CF$$

由于

$$S_{\text{梯形 } ABCD} = S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ACE} + S_{\triangle CDE}$$

即

$$\frac{1}{2}(AB + CD) \cdot (AF + CF) = S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ACE} + S_{\triangle CDE}$$

$$\frac{1}{2}(2 + 8) \cdot (4.8 + CF) = 4.8 + 22.4 + 4CF$$

解得

$$CF = 3.2$$

从而

$$AC = 8$$

12. 圆周上有 12 个点，两两连出六条弦，这些弦彼此没有公共点（既无公共端点，又不相交）。则有_____种连结方法。

答案：132.

解：考虑圆周上 $2n$ 个点的情况，连出 n 条满足条件的弦，方法数记为 a_n .

按顺时针将这些点记为 $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$. 取定点 A_1 ，对任意一个点 A_{2k} ，线段 A_1A_{2k} 将圆周分为 L_1 与 L_2 两部分. 对于 L_1 ，有 $k-1$ 对点，共有 a_{k-1} 种连结方法；对于 L_2 ，有 $n-k$ 对点，共有 a_{n-k} 中连结方法. 由于定点 A_1 可与 $A_2, A_4, A_6, \dots, A_{2n}$ 连成弦. 所以

$$a_n = a_{n-1} + a_1a_{n-2} + a_2a_{n-3} + a_3a_{n-4} + \dots + a_{n-3}a_2 + a_{n-2}a_1 + a_{n-1}$$

易知 $a_1 = 1, a_2 = 2$ ，代入上面递推式得

$$a_3 = 5, a_4 = 14, a_5 = 42, a_6 = 132$$

所以，共有 132 种连结方法。

二、解答题（第 13、14 小题各 12 分，第 15~17 小题各 14 分，共 66 分）

13. 定义： $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ ，试计算：

$$\frac{\frac{10! - 8!}{9!} - \frac{9! - 7!}{8!} + \frac{8! - 6!}{7!} - \frac{7! - 5!}{6!} + \frac{6! - 4!}{5!} - \frac{5! - 3!}{4!} + \frac{4! - 2!}{3!} - \frac{3! - 1!}{2!}}{\frac{8}{9} + \frac{7}{8} + \frac{6}{7} + \frac{5}{6} + \frac{4}{5}}$$

解：

$$\begin{aligned} \text{分子} &= \left(10 - \frac{1}{9}\right) - \left(9 - \frac{1}{8}\right) + \left(8 - \frac{1}{7}\right) - \left(7 - \frac{1}{6}\right) + \dots + \left(4 - \frac{1}{3}\right) - \left(3 - \frac{1}{2}\right) \\ &= (10 - 9 + 8 - 7 + 6 - 5 + 4 - 3) - \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{8} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) \\ &= (10 - 9 + 8 - 7 + 6 - 5 + 4 - 3 + 2 - 1) - \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{8} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{1}\right) \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} - \frac{1}{8} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{1} &= \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \times 2 \\ &= \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}\right) \\ &= \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \end{aligned}$$

故

$$\text{分子} = 5 - \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5}\right)$$

又

$$\begin{aligned} \text{分母} &= \left(1 - \frac{1}{9}\right) + \left(1 - \frac{1}{8}\right) + \left(1 - \frac{1}{7}\right) + \left(1 - \frac{1}{6}\right) + \left(1 - \frac{1}{5}\right) \\ &= 5 - \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5}\right) \\ &= \text{分子} \end{aligned}$$

故

$$\text{原式} = 1$$

14. n 个瓶中各自装有 $2m$ 克糖水，先将第 1 个瓶中的糖水倒 m 克到第 2 个瓶中，然后将第 2 个瓶中的糖水倒 m 克到第 3 个瓶中， $\dots$ ，再然后将第 $n-1$ 个瓶中的糖水倒 m 克到第 n 个瓶中，最后将第 n 个瓶中的糖水倒 m 克到第 1 个瓶中. 这样做过之后，发现 n 个瓶子中的糖水浓度均相同. 试以 $n = 3$ 为例，说明最初 n 个瓶子中的糖水浓度原本就是相同的。

解法一：定量计算

设这三个瓶分别为甲、乙、丙，其糖水浓度分别为 a 、 b 、 c （百分数）

① 第一次操作后，乙瓶中糖水的浓度变为

$$\frac{am + b \cdot 2m}{m + 2m} = \frac{a + 2b}{3}$$

② 第二次操作后，丙瓶中糖水的浓度变为

$$\left(\frac{a + 2b}{3} \cdot m + c \cdot 2m\right) \div (m + 2m) = \frac{a + 2b + 6c}{9}$$

③ 第三次操作后，甲瓶中糖水的浓度变为

$$\left(\frac{a+2b+6c}{9} \cdot m + a \cdot m\right) \div (m+m) = \frac{10a+2b+6c}{18} = \frac{5a+b+3c}{9}$$

依题意，甲、乙、丙中糖水浓度相同，即

$$\frac{5a+b+3c}{9} = \frac{a+2b}{3} = \frac{a+2b+6c}{9}$$

即

$$5a+b+3c=3a+6b=a+2b+6c$$

由 $5a+b+3c=3a+6b$ 得

$$5b-2a=3c, \text{ 即 } 10b-4a=6c \quad \text{①}$$

由 $3a+6b=a+2b+6c$ 得

$$4b+2a=6c \quad \text{②}$$

对照①和②得

$$10b-4a=4b+2a$$

所以

$$6b=6a, \text{ 即 } a=b$$

进一步

$$a=b=c$$

解法二：定性分析

设这三个瓶分别为甲、乙、丙，其糖水浓度分别为 $a\%$ 、 $b\%$ 、 $c\%$ ，而经三次操作最后的糖水浓度均为 $x\%$ 。

易知，两个浓度相同的糖水混合在一起，浓度当然不变；两个浓度不同的糖水混合在一起，新溶液的浓度必介于原溶液的浓度之间。

第一次操作后，乙瓶中糖水浓度变为 $x\%$ ；

第二次操作后，将乙瓶中 $x\%$ 的糖水倒 m 克到丙瓶中，丙瓶中糖水浓度必须也变为 $x\%$ ，则 $c=x$ ；

第三次操作后，将丙瓶中 $x\%$ 的糖水倒 m 克到甲瓶中，甲瓶中糖水浓度还得是 $x\%$ ，则 $a=x$ ；

再回到第一次，把甲瓶中浓度为 $x\%$ 的糖水倒 m 克到乙瓶中，乙瓶中糖水浓度仍为 $x\%$ ，所以， $b=x$ 。

所以

$$a=b=c=x$$

即，最初三个瓶中糖水的浓度本来就想同。

从以上分析可知，本题的结论与每次倒出的糖水的量无关。

解法三：倒推法

经过三次操作后，甲、乙、丙三个瓶中都有 $2m$ 克糖水，并且浓度相同，不妨设其中水为 a 克，糖为 $(2m-a)$ 克。

由于每次操作只有两个瓶中的糖水发生改变，而三个瓶含水总量为 $3a$ 克，含糖总量为 $(6m-3a)$ 克，所以当计算出一个瓶中糖和水的量之后，总是由总量去减已知瓶中糖和水的量，去计算另一个瓶中糖和水的量。

① 第三次操作是从丙中倒入 $\frac{1}{3}$ 的糖水到甲瓶，则丙瓶中原有水：

$$a \div \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}a \text{ (克)}$$

原有糖：

$$3m - \frac{3}{2}a \text{ (克)}$$

而甲瓶中原有水：

$$a - \frac{3}{2}a \times \frac{1}{3} = \frac{a}{2} \text{ (克)}$$

原有糖：

$$m - \frac{a}{2} \text{ (克)}$$

② 第二次操作，是从乙中倒入 $\frac{1}{3}$ 的糖水到丙瓶，则乙瓶中原有水：

$$a \div \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}a \text{ (克)}$$

原有糖：

$$3m - \frac{3}{2}a \text{ (克)}$$

而丙瓶中原有水：

$$3a - \frac{a}{2} - \frac{3}{2}a = a \text{ (克)}$$

原有糖：

$$(6m-3a) - \left(m - \frac{a}{2}\right) - \left(3m - \frac{3}{2}a\right) = 2m - a \text{ (克)}$$

③ 第一次操作，是从甲中倒 $\frac{1}{2}$ 的糖水到乙瓶，

则甲瓶中原有水：

$$\frac{a}{2} \div \left(1 - \frac{1}{2}\right) = a(\text{克})$$

原有糖:

$$2m - a(\text{克})$$

乙瓶中原有水:

$$3a - a - a = a(\text{克})$$

原有糖:

$$(6m - 3a) - (2m - a) - (2m - a) = 2m - a(\text{克})$$

由上述黑体字部分知, 甲、乙、丙开始浓度就相同.

15. 图中, 正方形 $ABCD$ 的边长为 6, $CE = 2BE$, $DF = 2CF$, 问五边形 $ECFHG$ 面积是多少? (请勿用相似形的知识作答)

答案: 五边形 $ECFHG$ 面积是 11.7.

解法一: 从已知条件可知: $BE = 2$, $DF = 4$, 直角三角形 BCD 的面积是: $6 \times 6 \div 2 = 18$, 只需从中减去三角形 BGE 和三角形 HDF 的面积, 即可得到五边形 $ECFHG$ 面积.

如图, 连接 DE , 在四边形 $BEDA$ 中,

$$S_{\triangle BEA} = S_{\triangle BDE} = 6 \times 2 \div 2 = 6, S_{\triangle BDA} = 18$$

高相等的三角形面积之比等于底之比

$$\frac{S_{\triangle BDA}}{S_{\triangle BGA}} = \frac{BD}{BG} = \frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle BGE}}$$

其中

$$S_{\triangle BGA} = S_{\triangle BEA} - S_{\triangle BGE} = 6 - S_{\triangle BGE}$$

所以

$$\frac{18}{6 - S_{\triangle BGE}} = \frac{6}{S_{\triangle BGE}}, 3 \times S_{\triangle BGE} = 6 - S_{\triangle BGE}, S_{\triangle BGE} = 1.5$$

同理可得: $S_{\triangle HDF} = 4.8$

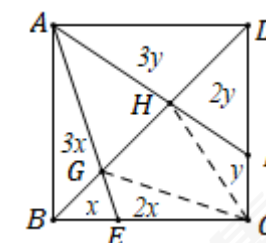
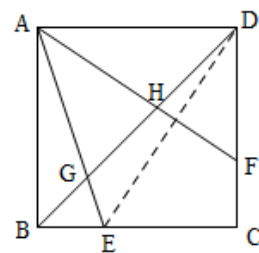
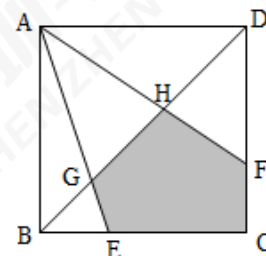
所以, 五边形 $ECFHG$ 的面积 = $18 - 1.5 - 4.8 = 11.7$

解法二:

易知 $BE = CF = 2$, $CE = DF = 4$

$$S_{\triangle ABE} = 6, S_{\triangle ADF} = 12$$

因为 $CE = 2BE$, 所以



$$S_{\triangle CGE} = 2S_{\triangle BGE}$$

令 $S_{\triangle BGE} = x$, 则 $S_{\triangle CGE} = 2x$

由图形的对称性, $S_{\triangle ABG} = S_{\triangle BCG} = 3x$

$$\text{所以 } 3x + x = 6, x = 1.5$$

同理可得: $S_{\triangle HDF} = 4.8$

所以, 五边形 $ECFHG = S_{\triangle BCD} - S_{\triangle BGE} - S_{\triangle HDF} = 18 - 1.5 - 4.8 = 11.7$

16. 我们将满足以下条件的正整数称为“超常数”: 该整数的每个数码都不为零且互不相同, 并且将其各位数码打乱, 排成一个最大数和一个最小数, 二者之差恰为它本身. 例如, 495 和 6174 都是“超常数”, 因为 $954 - 459 = 495$, $7641 - 1467 = 6174$. 请问: 是否存在五位的“超常数”? 若存在, 请举出一个例子; 若不存在, 请说明理由.

解: 不存在五位的“超常数”. 若不然, 假设存在五位的“超常数” N , 它的五个数码从大到小依次排列为 a, b, c, d, e . 由条件可知, $N = \overline{abcde} - \overline{edcba}$. 根据 a, b, c, d, e 的大小关系, 我们得到 N 的五位数码依次是 $a - e, b - d - 1, 9, 9 + d - b, 10 + e - a$.

注意到 9 是最大数码, 因此显然有 $a = 9$. 因为 $9 + d - b, 10 + e - a$ 都比 e 大, 而 $a - e = 9 - e \neq e$, 故只能是 $b - d - 1 = e$. 那么 $9 + d - b = 8 - e, 10 + e - a = e + 1$, 因此 N 的五位数码依次为 $9 - e, e, 9, 8 - e, e + 1$. 再次根据 a, b, c, d, e 的大小关系可知 $d = e + 1, b = 9 - e$. 而由 $b - d - 1 = e$ 可得 $b = 2e + 2$, 因此 $9 - e = 2e + 2$, 显然这样的 e 不存在. 因此不存在五位的“超常数”.

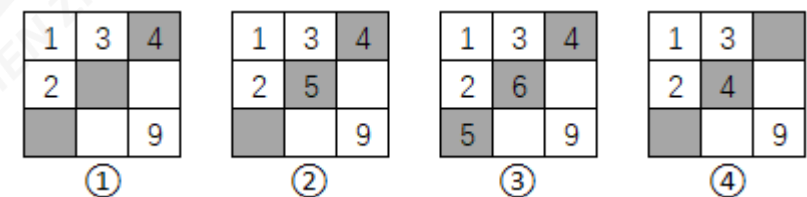
17. 图中是一个 3×3 的正方形网格, 其中数字 2 和 3 已经填好, 现将数字 1, 4~9 分别填入余下空格中, 使得: 第二、三两列每个方格中的数都比它左边方格中的数大; 第二、三两行每个方格中的数也都比它上方方格中的数大.

(1) 请在图中给出一种填法;

(2) 共有多少种填法? 请说明理由.

解: (1) 略.

(2) 共有 16 种填法. 按照要求, 数 1 只能填到左上角的方格中, 数 9 只能填到右下角的方格中, 4 只能填在灰色的方格中, 见图①.



(i) 4 填在右上角的灰色方格中. 此时 5 只能填在余下的 2 个灰色方格中, 见图②, 5 填在中间的灰色方格中, 从余下的 3 个整数 6, 7, 8 中任取 1 个, 填在第 3 列第 2 行中, 余下的两个数, 从小到大依次填在第 3 行第 1 列和第 2 列中, 有 3 种填法; 5 填在左下角的灰色方格中, 此时 6 只能填在中间的灰色方格中, 见图③, 余下的 2 个数 7 和 8, 可以分别填在第 3 行第 2 列和第 2 行第 3 列中, 有 2 种填法, 共有 5 种填法;

(ii) 4 填在在中间的灰色的方格中，见图④. 从余下的 4 个整数 5，6，7，8 中任取 2 个，从小到大依次填在第 3 列第 1 行和第 2 行中，最后余下的两个数，从小到大依次填在第 3 行第 1 列和第 2 列中. 共有 6 种填法；

(iii) 4 填在左下角的灰色方格中. 类似 (i)，有 5 种填法.

因此填法共有： $5+6+5=16$ 种.