

2021年第八届鹏程杯数学邀请赛（预赛）试题卷

（小学六年级组）

不定项选择题（本试卷共 25 题，每题 4 分，共 100 分。每题给出的五个选项中，至少有一个正确，多选、错选、不选均不得分。每小题的分值根据正确的选项个数平均分配，少选且正确时按此记分。）

1. 计算： $\frac{\frac{7}{18} \times 4\frac{1}{2} + \frac{1}{6}}{13\frac{1}{2} - 3\frac{3}{4} \div \frac{5}{16}} \times 18 = (\quad)$

A.21

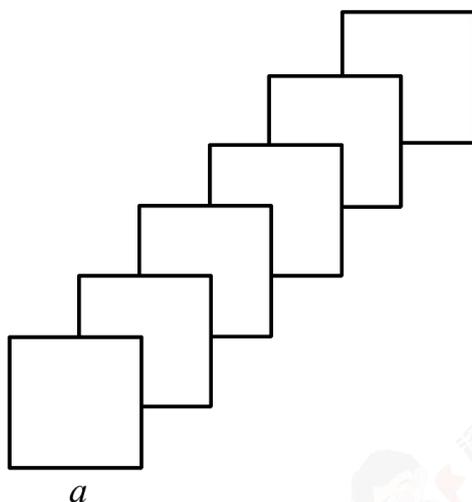
B.22

C.23

D. $2\frac{5}{9}$

E.以上都不对

2. 下面是由六个相同的正方形重叠起来构成的图形，连接点正好是正方形边的中点，正方形边长是 a ，则该图形的周长是（ ）。

A. $24a$ B. $14a$ C. $12a$ D. $18a$

E.以上都不对

3. 由 3 个不同的自然数组成一等式：

$$\square + \triangle + \bigcirc = \square \times \triangle - \bigcirc$$

这三个数中最多有（ ）个奇数。

A.1

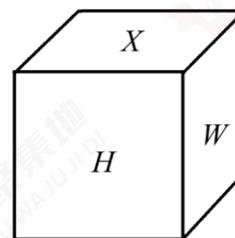
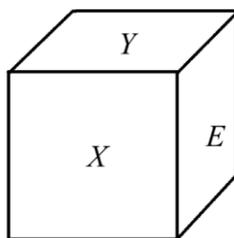
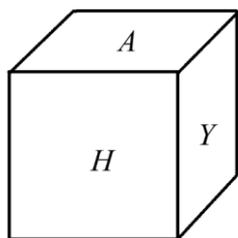
B.2

C.3

D.0

E.无法确定

4. 从三个方向看一个立方体如下图，则 H、X、Y 对面分别是字母（ ）。

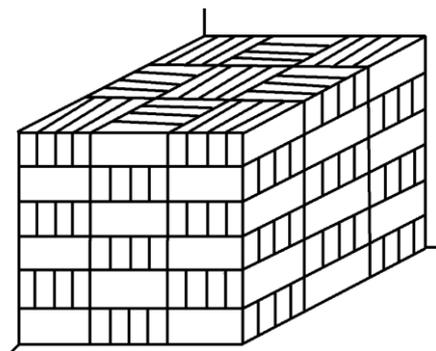


- A.W、A、E B.E、A、W C.A、W、E D.W、E、A E.以上都不对

5. 把一个自然数 n 的数位上的偶数数字相加所得的和记为 $E(n)$, 例如: $E(1999) = 0$, $E(2000) = 2$, $E(2021) = 2 + 2 = 4$. 则 $E(1) + E(2) + E(3) + \dots + E(100) = (\quad)$.

- A.50 B.100 C.400 D.2020 E.以上都不对

6. 在工厂的一块空地上堆放了 216 块砖(如图), 这个砖堆有两面靠墙. 现在把这个砖堆的表面涂满石灰, 则被涂上石灰的砖共有 () 块.



- A.36 B.48 C.50 D.106 E.以上都不对

7. 在算式: $2 \times \square\square\square = \square\square\square$ 的六个空格中, 分别填入 2, 3, 4, 5, 6, 7 这六个数字, 使算式成立, 并且算式的积能被 13 整除, 那么这个积是 () .

- A.234 B.286 C.534 D.654 E.以上都不对

8. 寒假期间, 某数学小组的同学们在图书馆发现一块古代楔形文字泥板的图片. 如下图, 同学们猜测它是一种乘法表的记录. 请你根据这个猜测, 判定

▽		▽▽▽
▽▽	◁	▽▽▽ ▽▽▽ ▽▽
▽▽▽	◁◁	▽▽▽ ▽▽▽ ▽
▽▽▽ ▽	◁◁◁	▽▽▽ ▽▽▽
▽▽▽ ▽▽	◁◁◁	▽▽▽ ▽▽
▽▽▽ ▽▽▽	◁◁◁	▽▽▽ ▽
▽▽▽ ▽▽▽ ▽	◁	▽▽▽
▽▽▽ ▽▽▽ ▽▽	◁◁	▽▽
▽▽▽ ▽▽▽ ▽▽▽	◁◁	▽
◁	◁	◁◁◁
◁▽	◁◁◁◁	▽▽▽ ▽▽▽ ▽▽▽
◁▽▽	◁◁◁◁	▽▽▽ ▽▽▽ ▽▽▽
◁▽▽▽	◁◁◁◁	▽▽▽ ▽▽▽ ▽
◁▽▽▽ ▽	◁◁	▽▽▽ ▽▽▽

A.635

B.395

C.536

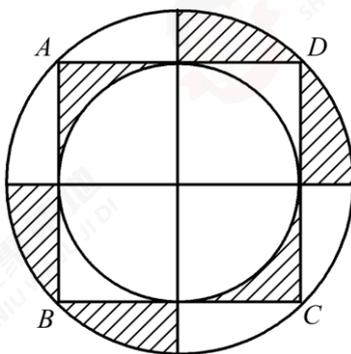
D.593

E.以上都不对

9. 算式 $a + \frac{1}{b+\frac{1}{c}} + d + \frac{1}{e+\frac{1}{f}} + g + \frac{1}{h+\frac{1}{i}}$ 的最大值为 (), 其中每个不同的字母代表不同的非零数码.

- A. $25 \frac{1003}{1008}$ B. $25 \frac{611}{1014}$ C. $25 \frac{609}{1026}$ D. $25 \frac{597}{1040}$ E. $25 \frac{620}{1001}$

10. 已知正方形 ABCD 的边长为 10cm，过它的四个顶点作一个大圆，过它的各边的中点做一个小圆，则将对边中点用直线连接起来得下图。那么，图中阴影部分的总面积等于（ ） cm^2 。（ π 取 3.14）



- A. 19.25 B. 29.25 C. 39.25 D. 9.25 E. 以上都不对

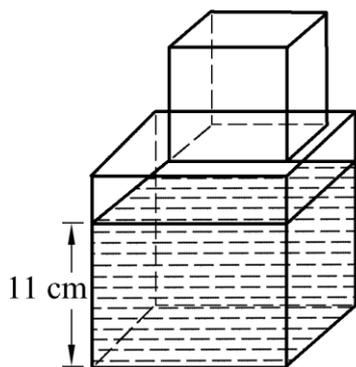
11. 有一个长方体，它的正面和上面的面积之和是 209，如果它的长、宽、高都是质数，那么这个长方体的体积是（ ）。

- A. 128 B. 342 C. 375 D. 500 E. 以上都不对

12. 如果某国物价下降 50%，那么原来买 1 件东西的钱现在就能买 2 件。1 件变为 2 件增加了 100%，这就相当于该国居民手中的钱增值了 100%，如果物价上涨了 25%，那么相当于手中的钱贬值了（ ）%。

- A. 20 B. 18 C. 15 D. 13 E. 以上都不对

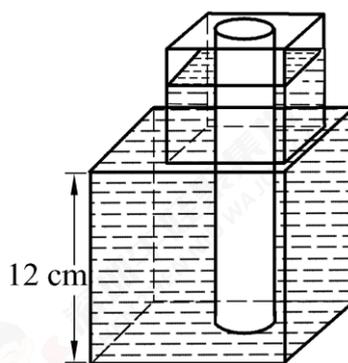
13. 如图，两个边长分别 12cm 和 8cm 的正立方体相叠合而成的容器内有深达 11cm 的水，今把底面积是 $24cm^2$ 的实心圆棒垂直插入到底面，则此时水面上升（ ）cm。



A.4.2

B.4.3

C.4.4



D.4.5

E.4.6

14. 如果一个正整数（大于0的自然数）能够表示为两个自然数（自然数包括0）的平方差，就称这个正整数为“鹏程数”。例如3是一个“鹏程数”，因为 $3 = 2^2 - 1^2$ ，16也是一个“鹏程数”，因为 $16 = 4^2 - 0^2$ 。现在将所有“鹏程数”由小到大排序：1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, …，则第2021个“鹏程数”是（ ）。

A.2694

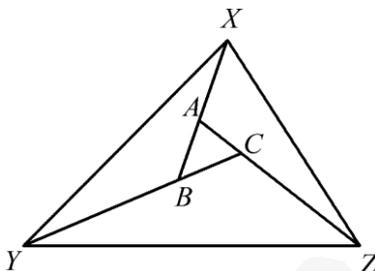
B.2695

C.2696

D.2697

E.以上都不对

15. 如图，我们将三角形 ABC 的 BA 边延长1倍到 X ， CB 边延长2倍到 Y ， AC 边延长3倍到 Z 。如果三角形 ABC 的面积等于1，则三角形 XYZ 的面积为（ ）。



A.19

B.20

C.21

D.22

E.以上都不对

16. 中国正在进入老龄化社会，社区中老年人数量日渐增多。今有五位老人的年龄互不相同，其中年龄最大的比年龄最小的大6岁，已知他们的平均年龄为85岁，则其中年龄最大的一位老人为（ ）岁。

A.87

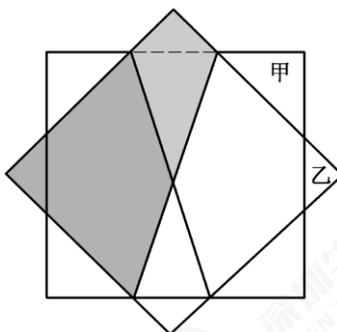
B.88

C.89

D.90

E.以上都不对

17. 如图，将两个正方形中心重合摆放，得到一个对称图形，已知图中两个阴影四边形的面积比是3:1，如果甲三角形的面积为42，那么乙三角形的面积是（ ）。



- A.21 B.22 C.23 D.24 E.以上都不对

18. 将所有的奇数按下列规则排成一个三角形的数表，则在此三角形数表中第 6 行第 5 列的数是（ ）。

1	3	7	13	21	31	...
5	9	15	23	33	...	
11	17	25	35	...		
19	27	37	...			
29	39	...				
41	...					
...						

- A.99 B.101 C.103 D.105 E.以上都不对

19. 某小学举行足球比赛，共有 A, B, C, D, E 五个足球队参加，比赛规则是两两各赛一场，胜一场得 3 分，负一场得 0 分，平一场两队各得 1 分。十场球赛比完后，五个队的得分互不相同。A 队未败一场，且打败了 B 队，可 B 队得了冠军，C 队也未败一场，名次却在 D 队之后，则以下说法正确的是（ ）。

- A.A 队得 6 分
- B.B 队得 7 分
- C.C 队得 4 分
- D.D 队得 5 分
- E.E 队得 2 分

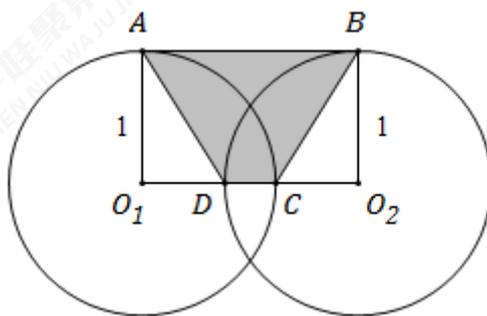
20. 我们用 (x, y) 表示 x, y 这两数中较大的数减去较小的数所得的结果，比如：

$$(2, 3) = (3, 2) = 3 - 2 = 1, (5, 5) = 5 - 5 = 0, \dots$$

现将 $1 \sim 2020$ 这 2020 个自然数分成 A, B 两组(每组 1010 个数), 并把 A 组的数从小到大排列得到 $a_1 < a_2 < \dots < a_{1010}$, 而将 B 组的数从大到小排列得到 $b_1 > b_2 > \dots > b_{1010}$. 则 $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) + (a_3, b_3) + \dots + (a_{1009}, b_{1009}) + (a_{1010}, b_{1010})$ 的值为 ().

- A.1000000 B.1010025 C.1020100
D.1030225 E.4080400

21. 长方形 O_1O_2BA 的宽 $AO_1 = 1$ 厘米, 分别以 O_1 与 O_2 为圆心, 1 厘米为半径画圆 O_1 和圆 O_2 , 交线段 O_1O_2 于点 C 和 D, 如图所示. 则四边形 ABCD 的面积等于 () 平方厘米.



- A. $\frac{1}{2}$ B.1 C. $1\frac{1}{2}$ D.2 E.以上都不对

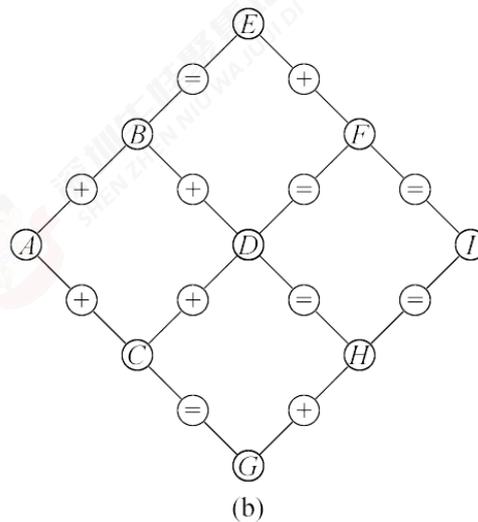
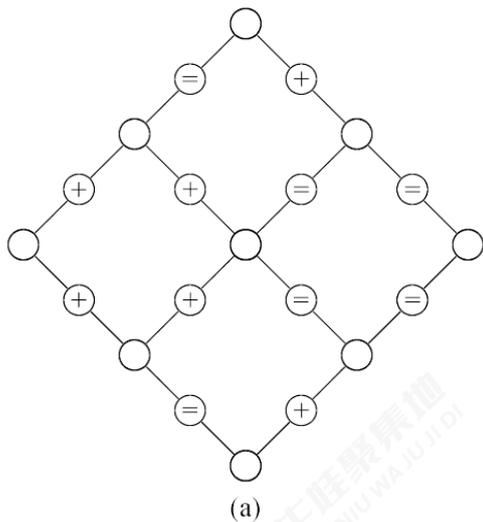
22. 某天 110 指挥中心接到报警电话, 得知有几位驴友被困在深山里的某个角落, 马上确定最优解救方案, 随后消防官兵乘车立即出发. 如果行驶 2 个小时后, 将车速提高 $\frac{1}{5}$, 就可比预定时间提前 30 分钟赶到; 如果先按原速度行驶 80 千米, 再将车速提高 $\frac{1}{4}$, 就可比预定时间提前 40 分钟赶到, 则消防官兵一共需要乘车行驶的总路程是 () 千米.

- A.210 B.220 C.230 D.240 E.以上都不对

23. 一项铺路工程, 如果甲队单独做 100 天可以完成, 乙队单独做 150 天可以完成. 现在两队同时施工, 工作效率比单独做提高 20%, 当工程完成 $\frac{2}{5}$ 时, 正好赶上新冠疫情, 影响施工进度, 使得每天少铺 70 米, 结果前后一起共用了 90 天完成这项工程. 则整个工程要铺路 () 米.

- A.6125 B.6135 C.6145 D.6155 E.以上都不对

24. 图(a)中包括六个加法算式,要在圆圈里填上不同的自然数,使六个算式都成立,那么图(b)中的I最小是().



- A.10 B.11 C.12 D.13 E.以上都不对

25. 一个长方形把平面分成两部分,那么三个长方形最多把平面分成()个部分.

- A.6 B.9 C.16 D.26 E.以上都不对

2021年第八届鹏程杯数学邀请赛(预赛)答案

(小学六年级组)

不定项选择题 (本试卷共 25 题, 每题 4 分, 共 100 分。每题给出的五个选项中, 至少有一个正确, 多选、错选、不选均不得分。每小题的分值根据正确的选项个数平均分配, 少选且正确时按此记分。)

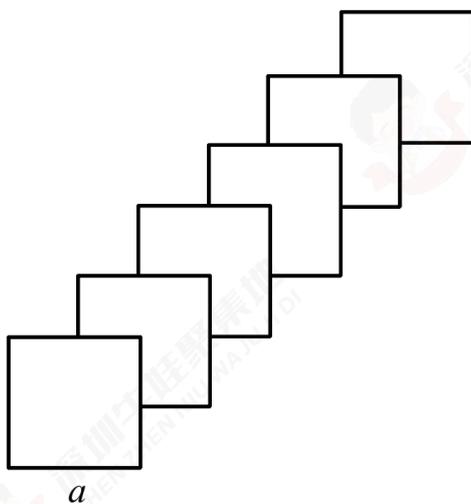
1. 计算: $\frac{\frac{7}{18} \times 4\frac{1}{2} + \frac{1}{6}}{13\frac{1}{2} - 3\frac{3}{4} \div \frac{5}{16}} \times 18 = (\quad)$

- A.21 B.22 C.23 D. $2\frac{5}{9}$ E.以上都不对

解答: $\frac{\frac{7}{18} \times 4\frac{1}{2} + \frac{1}{6}}{13\frac{1}{2} - 3\frac{3}{4} \div \frac{5}{16}} \times 18 = \frac{\frac{7}{18} \times \frac{9}{2} + \frac{1}{6}}{13\frac{1}{2} - \frac{15}{4} \times \frac{16}{5}} \times 18 = \frac{\frac{7}{4} + \frac{1}{6}}{13\frac{1}{2} - 12} \times 18 = \frac{\frac{7}{4} + \frac{1}{6}}{1\frac{1}{2}} \times 18 = \frac{(\frac{7}{4} + \frac{1}{6}) \times 2}{3} \times 18 = 21 + 2 = 23.$

故选 C.

2. 下面是由六个相同的正方形重叠起来构成的图形, 连接点正好是正方形边的中点, 正方形边长是 a , 则该图形的周长是 ().



- A. $24a$ B. $14a$ C. $12a$ D. $18a$ E. 以上都不对

解答: 图形的周长, 横向由 7 条正方形的边组成, 竖向也由 7 条正方形的边组成. 因此周长是 $14a$.

故选 B.

3. 由 3 个不同的自然数组成一等式:

$$\square + \triangle + \bigcirc = \square \times \triangle - \bigcirc$$

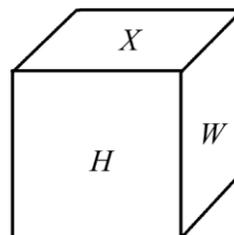
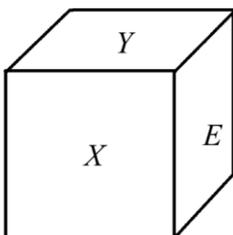
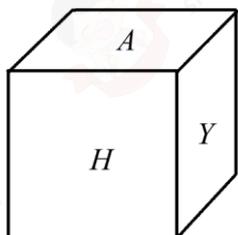
这三个数中最多有 () 个奇数.

A.1 B.2 C.3 D.0 E.无法确定

解答: 如果这三个数中有 2 个奇数和 1 个偶数, 那么等式左边必为偶数, 等式右边必为奇数, 不可能. 如果这三个数均为奇数, 那么等式左边必为奇数, 而等式右边必为偶数, 不可能. 因此, 这三个数中最多有 1 个奇数, 例如 $2 + 4 + 1 = 2 \times 4 - 1$.

故选 A.

4. 从三个方向看一个立方体如下图, 则 H、X、Y 对面分别是字母 ().



A.W、A、E B.E、A、W C.A、W、E D.W、E、A E.以上都不对

解答: 从第一和第三个图知道, H 的对面不是 A, Y, X, W, 只能是 E. 同样可得, X 的对面是 A, Y 的对面是 W.

故选 B.

5. 把一个自然数 n 的数位上的偶数数字相加所得的和记为 $E(n)$, 例如: $E(1999) = 0$, $E(2000) = 2$, $E(2021) = 2 + 2 = 4$. 则 $E(1) + E(2) + E(3) + \dots + E(100) = ()$.

A.50 B.100 C.400 D.2020 E.以上都不对

解答: 2, 4, 6, 8 这 4 个数字, 每个在个位出现 10 次, 在十位出现 10 次, 所以 $E(1) + E(2) + \dots + E(100) = (2 + 4 + 6 + 8) \times (10 + 10) = 400$.

故选 C.

6. 在工厂的一块空地上堆放了 216 块砖(如图), 这个砖堆有两面靠墙. 现在把这个砖堆的表面涂满石灰, 则被涂上石灰的砖共有 () 块.

▽		▽▽▽
▽▽	◁	▽▽▽ ▽▽▽
▽▽▽	◁◁	▽▽▽ ▽▽▽ ▽
▽▽▽ ▽	◁◁◁	▽▽▽ ▽▽▽
▽▽▽ ▽▽	◁◁◁	▽▽▽ ▽▽
▽▽▽ ▽▽▽	◁◁◁	▽▽▽ ▽
▽▽▽ ▽▽▽ ▽	◁	▽▽▽
▽▽▽ ▽▽▽ ▽▽	◁◁	▽▽
▽▽▽ ▽▽▽ ▽▽▽	◁◁	▽
◁	◁	◁◁◁
◁▽	◁◁◁◁	▽▽▽ ▽▽▽ ▽▽▽
◁▽▽	◁◁◁◁	▽▽▽ ▽▽▽ ▽▽▽
◁▽▽▽	◁◁◁◁	▽▽▽ ▽▽▽ ▽
◁▽▽▽ ▽	◁◁	▽▽▽ ▽▽▽

A.635

B.395

C.536

D.593

E.以上都不对

解答： 图片中记录的是自然数乘以 9 的运算结果. 左列是被乘数，右列是该数乘以 9 的积，经过分析可知：其中 ▽ 代表 1，◁ 代表 10，◁ 代表 60. 因此


 表示 $60 \times 6 + 10 \times 3 + 5 \times 1 = 395$.

故选 B.

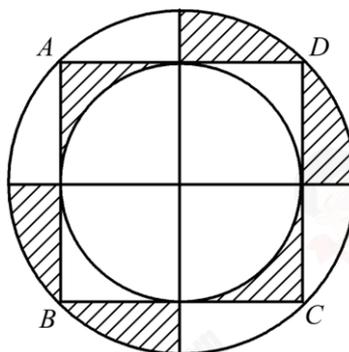
9. 算式 $a + \frac{1}{b+\frac{1}{c}} + d + \frac{1}{e+\frac{1}{f}} + g + \frac{1}{h+\frac{1}{i}}$ 的最大值为 (), 其中每个不同的字母代表不同的非零数码.

A. $25 \frac{1003}{1008}$ B. $25 \frac{611}{1014}$ C. $25 \frac{609}{1026}$ D. $25 \frac{597}{1040}$ E. $25 \frac{620}{1001}$

解答: 要使算式的值尽可能大, 则 a, d, g 应尽可能大, 可取 $a = 9, d = 8, g = 7$. 而 b, e, h 则应尽可能小, 所以可取 $b = 1, e = 2, h = 3$, 由于 $\frac{1}{m+\frac{1}{n+1}} > \frac{1}{(m+1)+\frac{1}{n}}$, 故取 $c = 6$, 而 f, i 只剩下 4 和 5 可供选择, 故可取 $f = 5, i = 4$, 故最大值为 $9 + \frac{1}{1+\frac{1}{6}} + 8 + \frac{1}{2+\frac{1}{5}} + 7 + \frac{1}{3+\frac{1}{4}} = 25 \frac{620}{1001}$.

故选 E.

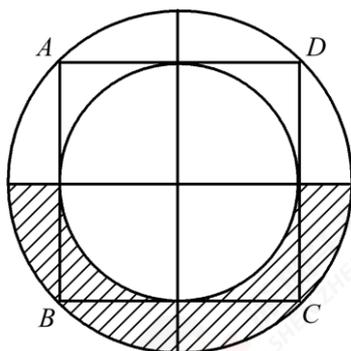
10. 已知正方形 ABCD 的边长为 10cm, 过它的四个顶点作一个大圆, 过它的各边的中点做一个小圆, 则将对边中点用直线连接起来得下图. 那么, 图中阴影部分的总面积等于 () cm^2 . (π 取 3.14)



A. 19.25 B. 29.25 C. 39.25 D. 9.25 E. 以上都不对

解答: 原题阴影部分相当于下图阴影部分, 即半个圆环, 小圆半径为 $10 \div 2 = 5cm$, 大圆半径的平方减去小圆半径的平方等于 5^2 , 所求面积为 $\frac{1}{2} \times \pi \times 5^2 = 39.25 cm^2$.

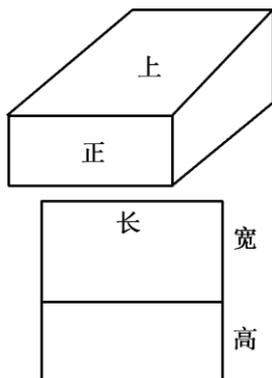
故选 C.



11. 有一个长方体，它的正面和上面的面积之和是 209，如果它的长、宽、高都是质数，那么这个长方体的体积是（ ）。

- A.128 B.342 C.375 D.500 E.以上都不对

解答：如图，这个长方体的正面与上面的面积之和等于这个长方体的长 \times (宽 + 高) = $209 = 11 \times 19$ ，从而有两种可能：



(1)长 = 11，宽 + 高 = 19 = 17 + 2.

(2)长 = 19，宽 + 高 = 11不是两个质数的和.

因此，长方体的体积为 $2 \times 11 \times 17 = 374$.

故选 E.

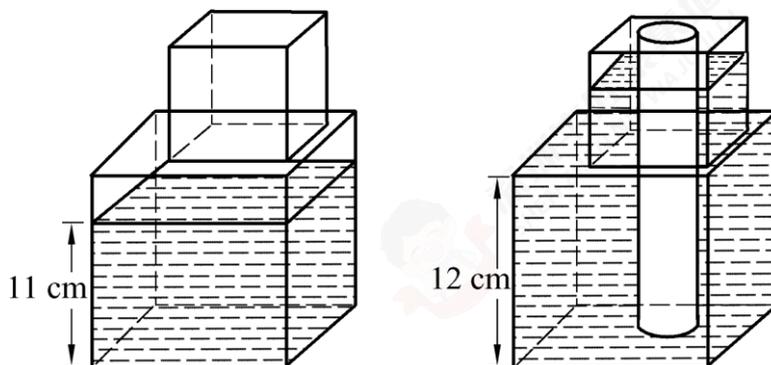
12. 如果某国物价下降 50%，那么原来买 1 件东西的钱现在就能买 2 件. 1 件变为 2 件增加了 100%，这就相当于该国居民手中的钱增值了 100%，如果物价上涨了 25%，那么相当于手中的钱贬值了（ ）%。

- A.20 B.18 C.15 D.13 E.以上都不对

解答：不难列出算式： $\left[1 - \frac{1}{1+25\%}\right] \times 100\% = 20\%$

故选 A.

13. 如图, 两个边长分别 12cm 和 8cm 的正立方体相叠合而成的容器内有深达 11cm 的水, 今把底面积是 24cm^2 的实心圆棒垂直插入到底面, 则此时水面上升 () cm.



A.4.2

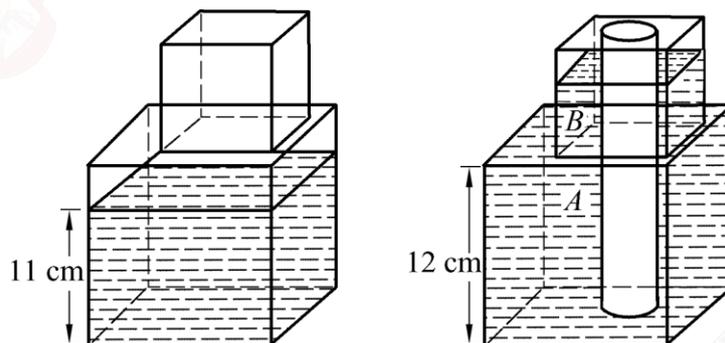
B.4.3

C.4.4

D.4.5

E.4.6

解答: 如解图, 原来水的体积为 $12 \times 12 \times 11 = 1584\text{cm}^3$, 插入圆棒后, A 部分体积为 $(12 \times 12 - 24) \times 12 = 1440\text{cm}^3$, B 部分体积为 $1584 - 1440 = 144\text{cm}^3$, B 部分水深为 $144 \div (8 \times 8 - 24) = 3.6\text{cm}$, 故水面上升了 $(12 + 3.6) - 11 = 4.6\text{cm}$.



故选 E.

14. 如果一个正整数 (大于 0 的自然数) 能够表示为两个自然数 (自然数包括 0) 的平方差, 就称这个正整数为“鹏程数”. 例如 3 是一个“鹏程数”, 因为 $3 = 2^2 - 1^2$, 16 也是一个“鹏程数”, 因为 $16 = 4^2 - 0^2$. 现在将所有“鹏程数”由小到大排序: 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, ..., 则第 2021 个“鹏程数”是 ().

A.2694

B.2695

C.2696

D.2697

E.以上都不对

解答: 完全平方数除以 4 只能余 0 或 1, 两个完全平方数相减, 其差除以 4 余数只能是 0 或 1 或 3, 即除以 4 余 2 的数不能写成两个完全平方数的差. 由于

$$(n+1)^2 - (n-1)^2 = 4n$$

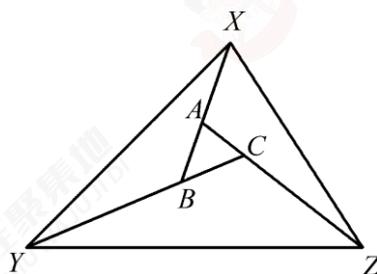
$$(2n+1)^2 - (2n)^2 = 4n+1$$

$$(2n+2)^2 - (2n+1)^2 = 4n+3$$

所以,除 $4n+2$ 外,均可表示成两个数平方差.即每4个连续的自然数中,有一个不是“鹏程数”,所以第2021个“鹏程数”为:2695.

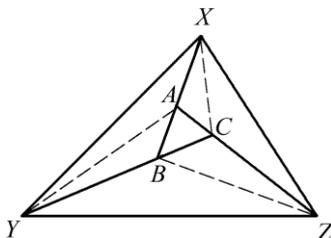
故选 B.

15. 如图,我们将三角形 ABC 的 BA 边延长1倍到 X , CB 边延长2倍到 Y , AC 边延长3倍到 Z .如果三角形 ABC 的面积等于1,则三角形 XYZ 的面积为().



- A.19 B.20 C.21 D.22 E.以上都不对

解答: 联结 AY, BZ, CX . 我们用 $S_{\triangle ABC}$ 来表示三角形 ABC 的面积. 由于 $\triangle AYB$ 与 $\triangle ABC$ 的高相等,而底边 $BY = 2BC$,所以 $S_{\triangle AYB} = 2S_{\triangle ABC} = 2$.



同理

$$S_{\triangle CBZ} = 3S_{\triangle ABC} = 3$$

$$S_{\triangle ACX} = S_{\triangle ABC} = 1$$

类似地

$$S_{\triangle AYX} = S_{\triangle AYB} = 2$$

$$S_{\triangle BYZ} = 2S_{\triangle CBZ} = 6$$

$$S_{\triangle CZX} = 3S_{\triangle ACX} = 3$$

于是

$$\begin{aligned} S_{\triangle XYZ} &= S_{\triangle ABC} + S_{\triangle AYB} + S_{\triangle CBZ} + S_{\triangle ACX} + S_{\triangle AYX} + S_{\triangle BYZ} + S_{\triangle CZX} \\ &= 1 + 2 + 3 + 1 + 2 + 6 + 3 \\ &= 18 \end{aligned}$$

故选 E.

16. 中国正在进入老龄化社会, 社区中老年人数量日渐增多. 今有五位老人的年龄互不相同, 其中年龄最大的比年龄最小的大6岁, 已知他们的平均年龄为85岁, 则其中年龄最大的一位老人为()岁.

- A.87 B.88 C.89 D.90 E.以上都不对

解答: 设这五个老人的年龄为 a, b, c, d, e , 且 $a < b < c < d < e$. 则

$$e - a = 6, a + b + c + d + e = 85 \times 5 = 425$$

① 因为

$$d \leq e - 1, c \leq e - 2, b \leq e - 3, a = e - 6$$

所以

$$(e - 6) + (e - 3) + (e - 2) + (e - 1) + e \geq 425$$

$$e \geq 87.4$$

② 因为

$$b \geq a + 1, c \geq a + 2, d \geq a + 3, e = a + 6$$

$$a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + (a + 6) \leq 425$$

$$a \leq 82.6$$

即

$$e = a + 6 \leq 88.6$$

所以

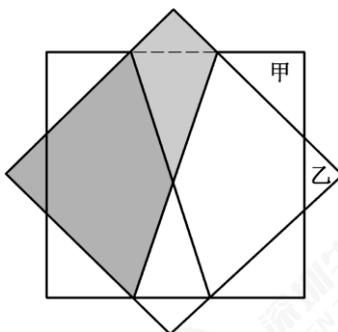
$$87.4 \leq e \leq 88.6$$

所以

$$e = 88$$

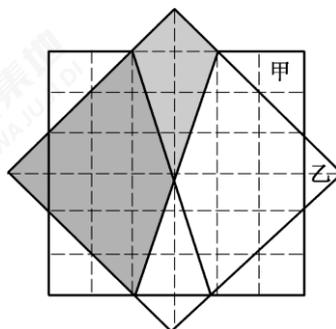
故选 B.

17. 如图, 将两个正方形中心重合摆放, 得到一个对称图形, 已知图中两个阴影四边形的面积比是3:1, 如果甲三角形的面积为42, 那么乙三角形的面积是().



- A.21 B.22 C.23 D.24 E.以上都不对

解答：按如图方式进行分割，不难发现 $S_{甲} = 2S_{乙}$ ，则 $S_{乙} = 21$ 。



故选 A.

18. 将所有的奇数按下列规则排成一个三角形的数表，则在此三角形数表中第 6 行第 5 列的数是 ().

1	3	7	13	21	31	...
5	9	15	23	33	...	
11	17	25	35	...		
19	27	37	...			
29	39	...				
41	...					
...						

- A.99 B.101 C.103 D.105 E.以上都不对

解答：可以观察出这个三角形数表中第 5 列的数构成一个二阶等差数列（相邻两项之差构成等差数列），即第 5 列 $21 \xrightarrow{+12} 33 \xrightarrow{+14} 47 \xrightarrow{+16} 63 \xrightarrow{+18} 81 \xrightarrow{+20} 101 \dots$ ，所以第 6 行第 5 列的数是 101.

故选 B.

19. 某小学举行足球比赛, 共有 A, B, C, D, E 五个足球队参加, 比赛规则是两两各赛一场, 胜一场得 3 分, 负一场得 0 分, 平一场两队各得 1 分. 十场球赛比完后, 五个队的得分互不相同. A 队未败一场, 且打败了 B 队, 可 B 队得了冠军, C 队也未败一场, 名次却在 D 队之后, 则以下说法正确的是 ().

A.A 队得 6 分

B.B 队得 7 分

C.C 队得 4 分

D.D 队得 5 分

E.E 队得 2 分

解答: B 队负 A 队, 平 C 队, 最多得 7 分; A 队不可能胜两场, 否则得分将高于 B 队, 所以 A 队胜 B 队, 其余三场都平, 得 6 分; C 队未负一场, 最少得 4 分, 又 C 队名次在 D 队之后, 所以 D 队得 5 分, C 队得 4 分. 由 D 队得 5 分, 且负 B 队, 平 A、C 队, 推知 D 队胜 E 队; 又 E 队负 B 队, 平 A、C 队, 所以 E 队得 2 分. 各队相互比赛得分情况见下表.

	A	B	C	D	E	总分
A		3	1	1	1	6
B	0		1	3	3	7
C	1	1		1	1	4
D	1	0	1		3	5
E	1	0	1	0		2

故选 ABCDE.

20. 我们用 (x, y) 表示 x, y 这两数中较大的数减去较小的数所得的结果, 比如:

$$(2, 3) = (3, 2) = 3 - 2 = 1, (5, 5) = 5 - 5 = 0, \dots$$

现将 1~2020 这 2020 个自然数分成 A, B 两组(每组 1010 个数), 并把 A 组的数从小到大排列得到 $a_1 < a_2 < \dots < a_{1010}$. 而将 B 组的数从大到小排列得到 $b_1 > b_2 > \dots > b_{1010}$. 则 $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) + (a_3, b_3) + \dots + (a_{1009}, b_{1009}) + (a_{1010}, b_{1010})$ 的值为 ().

A.1000000

B.1010025

C.1020100

D.1030225

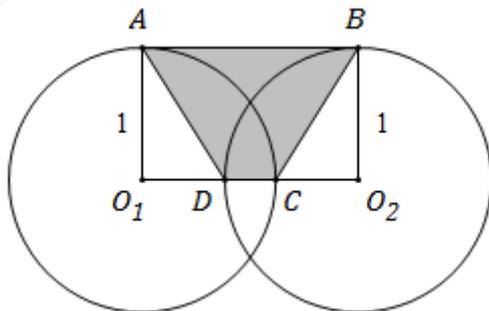
E.4080400

解答: 首先我们来证明, 1~2020 中的后 1010 个数一定不会放到一组 (x, y) 中来计算. 设 1011~2020 这 1010 个数, 有 m 个出现在 A 组, 有 n 个出现在 B 组, 则 $m + n = 1010$.

由于 A 组中的数是从小到大排列的, B 组中的数是从大到小排列的, 所以 1011~2020 中的数如果出现在 A 组, 其中最小的数应为 $a_{1010-m+1} = a_{1011-m}$; 这些数出现在 B 组, 其中最小的数为 $b_n = b_{1010-m}$. 由此可以看出, 不管 m 和 n 怎么取值, 1011~2020 中的数都不会放到一组 (x, y) 中来计算. 同理 1~1010 中的数也不会放到一组 (x, y) 中来计算. 那么每一组 (x, y) 中, 必有一个来自于 1~1010, 另一个来自于 1011~2020, 得到的结果必然是后一半的数减前一半的数, 我们要计算的算式可以改为: $(1011 + 1012 + \dots + 2019 + 2020) - (1 + 2 + 3 + \dots + 1009 + 1010) = 1010 \times 1010 = 1020100$.

故选 C.

21. 长方形 O_1O_2BA 的宽 $AO_1 = 1$ 厘米, 分别以 O_1 与 O_2 为圆心, 1 厘米为半径画圆 O_1 和圆 O_2 , 交线段 O_1O_2 于点 C 和 D, 如图所示. 则四边形 ABCD 的面积等于 () 平方厘米.



- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. 2 E. 以上都不对

解答: 四边形 ABCD 是个梯形, $AB = O_1O_2$ 是上底, CD 是下底. 大家都知道, 梯形面积 $= \frac{(\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高}}{2}$. 其中, 高 $= AO_1 = 1$ 厘米, 而上底、下底未直接给出, 其实图形中隐藏了上底+下底的数量关系,

$$AB + CD = O_1O_2 + CD = (O_1C + O_2D - CD) + CD = 1 + 1 - CD + CD = 2$$

所以

$$S_{ABCD} = \frac{(AB + CD) \times AO_1}{2} = \frac{2 \times 1}{2} = 1 (\text{平方厘米})$$

故选 B.

22. 某天 110 指挥中心接到报警电话, 得知有几位驴友被困在深山里的某个角落, 马上确定最优解救方案, 随后消防官兵乘车立即出发. 如果行驶 2 个小时后, 将车速提高 $\frac{1}{5}$,

就可比预定时间提前 30 分钟赶到; 如果先按原速度行驶 80 千米, 再将车速提高 $\frac{1}{4}$, 就可比预定时间提前 40 分钟赶到, 则消防官兵一共需要乘车行驶的总路程是 () 千米.

- A.210 B.220 C.230 D.240 E.以上都不对

解答: 设原来的车速为 v 千米/小时, 预定时间为 t 小时

由第一个条件可知

$$2v + \left(1 + \frac{1}{5}\right)v \times \left(t - 2 - \frac{30}{60}\right) = vt$$

两边同时除以 v

$$2 + \left(1 + \frac{1}{5}\right)\left(t - 2 - \frac{30}{60}\right) = t$$

解得

$$t = 5$$

由第二个条件可得

$$80 + \left(1 + \frac{1}{4}\right)v \times \left(t - \frac{80}{v} - \frac{40}{60}\right) = vt$$

把 $t = 5$ 代入, 解得

$$v = 48$$

所以

$$\text{总路程} = 48 \times 5 = 240 \text{ (千米)}$$

故选 D.

23. 一项铺路工程, 如果甲队单独做 100 天可以完成, 乙队单独做 150 天可以完成. 现在两队同时施工, 工作效率比单独做提高 20%, 当工程完成 $\frac{2}{5}$ 时, 正好赶上新冠疫情, 影响施工进度, 使得每天少铺 70 米, 结果前后一起共用了 90 天完成这项工程. 则整个工程要铺路 () 米.

- A.6125 B.6135 C.6145 D.6155 E.以上都不对

解答: 原来甲乙合作工效

$$\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{150}\right) \times (1 + 20\%) = \frac{1}{50}$$

完成前面 $\frac{2}{5}$ 的工作量需工时

$$\frac{2}{5} \div \frac{1}{50} = 20 \text{ (天)}$$

完成后面 $\frac{3}{5}$ 的工作量需工时

$$90 - 20 = 70(\text{天})$$

工作效率是

$$\frac{3}{5} \div 70 = \frac{3}{350}$$

工效之差为

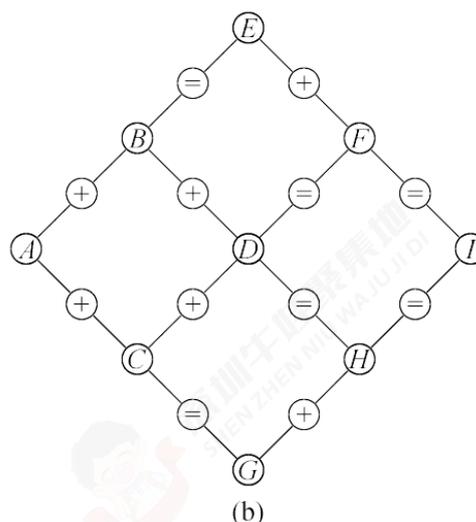
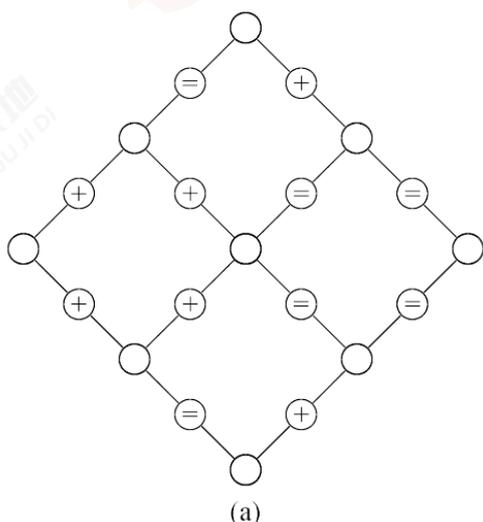
$$\frac{1}{50} - \frac{3}{350} = \frac{4}{350} = \frac{2}{175}$$

总工作量为

$$70 \div \frac{2}{175} = 6125$$

故选 A.

24. 图(a)中包括六个加法算式,要在圆圈里填上不同的自然数,使六个算式都成立,那么图(b)中的I最小是().



- A.10 B.11 C.12 D.13 E.以上都不对

解答: 为便于说理,各圆圈内欲填的数依次用字母 A, B, C, D, E, F, G, H, I 代替(图(b)).

经观察 $I = A + B + C + D$. 题目要 I 尽可能小,最极端的想法,希望 A, B, C, D 只占 1, 2, 3, 4. 但这会产生矛盾,因为 1 总要和 2, 3, 4 中的某两个实施加法,但 $1 + 3 = 4$ 为 G, H, E, F 中某值,又与 A, B, C, D 中已有的 4 冲突,所以 A, B, C, D 不能是 1, 2, 3, 4.

那么退而求之,不妨先设 $A = 1$,如先考虑 B, B 尽可能小最好, $B = 2$,从而决定了 $E =$

3, $C \neq 3, D \neq 3$.

这样一来, C, D 只能取 4 和 5. 但如 $C = 4$ 导致 $G = 5$ 和 $D = 5$ 冲突, 而 $C = 5, D = 4$ 又导致 $G = A + C = 6$ 和 $H = B + D = 2 + 4 = 6$ 冲突.

在碰了钉子后, 再看在 $A = 1$ 设定后, 不应随随便便先填 B 的值. 从结构上看, 因为 B, C 地位对称, 不妨先考虑 $D. D$ 应尽可能小, 最好设 $D = 2, B, C$ 至少取 3, 5, 若如此, 由 $B + D$ 或 $C + D$ 产生的 5 会与 B, C 中已有的 5 矛盾.

所以, B, C 中可能取 3, 6. 从而形成了: $A = 1, D = 2, B, C$ 取 3, 6 (B, C 地位对称). 这样一来其他字母所代表的值就立即推出, 不妨设 $B = 3, C = 6, A + B = E = 4; C + D = 6 + 2 = 8 = F; A + C = 1 + 6 = 7 = G; B = D = 3 + 2 = 5 = H$, 恰好满足 $E + F = 4 + 8 = 12 = 7; G + H = 7 + 5 = 12 = I$.

综上所述: $A = 1, D = 2, B = 3, C = 6$ 决定了其他值, 且决定了 $I = 12$, 是一个较小的 I 的值, 自然要问 I 值还可能比 12 小吗?

分析 I 的值有三种不同的获得方式

$$I = A + B + C + D = E + F = G + H$$

$$3I = A + B + C + D + E + F + G + H$$

而 8 个字母最少是代表 1, 2, ..., 7, 8 的情况

$$3I \geq (1 + 2 + \dots + 7 + 8) = 36$$

$$I \geq 12$$

现已推出了使 $I = 12$ 的一种填法, 所以是最佳方案了.

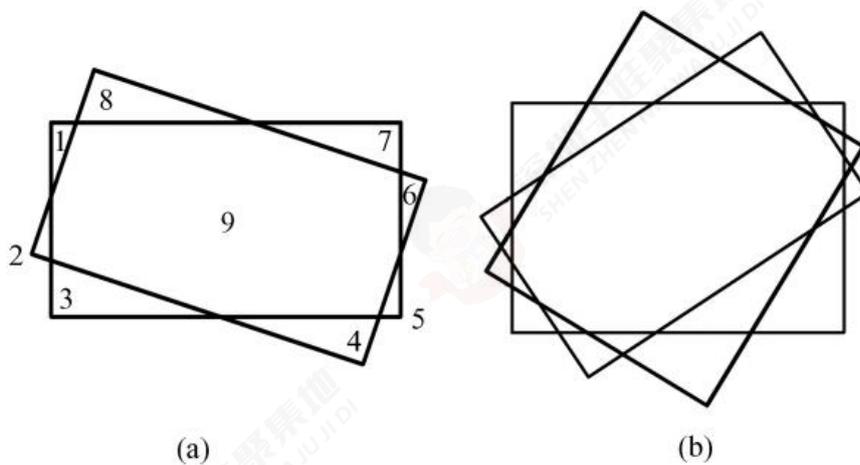
故选 C.

25. 一个长方形把平面分成两部分, 那么三个长方形最多把平面分成 () 个部分.

A. 6 B. 9 C. 16 D. 26 E. 以上都不对

解答: 一个长方形把平面分成两部分. 第二个长方形的每一条边至多把第一个长方形的内部分成 2 部分, 这样第一个长方形的内部至多被第二个长方形分成 5 部分. 同理, 第二个长方形的内部至多被第一个长方形分成 5 部分. 这两个长方形有公共部分 (如图(a)中, 标有数字 9 的部分). 还有一个区域位于两个长方形外面, 所以两个长方形至多把平面分成 10 部分. 第三个长方形的每一条边至多与前两个长方形中的每一个的两条边相交, 故每一条边被隔成五条小线段, 其中间的三条小线段中的每一条线段都把前两个长方形内部的某一部分一分为二, 所以至多增加 $3 \times 4 = 12$ 个部分. 而第三个长方形的 4 个顶点都在前两个长方形

的外面，至多能增加 4 个部分，所以三个长方形至多把平面分成 $10 + 12 + 4 = 26$ 个部分。把平面分成 26 个部分的三个长方形是存在的，如图(b)所示。



故选 D.